

1 Введение

Задача о термоэлектрическом токе в сверхпроводниках при наличии контактов с разными материалами на данный момент не решена окончательно. С тех пор, как Гинзбург [1, 2] показал, что термоэлектрический ток в сверхпроводниках не исчезает, это явление подверглось теоретическому [3, 4] и экспериментальному [5, 6] изучению. На данный момент далеко не везде удалось получить удовлетворительное теоретическое объяснение результатов эксперимента.

В нормальном металле плотность тока при наличии градиента температуры ∇T и электрического поля \mathbf{E} дается выражением

$$\mathbf{j} = \sigma_N \mathbf{E} + \alpha_N \nabla T, \alpha_N \sim \frac{\sigma_N T}{e \epsilon_F} \quad (1)$$

где σ_N проводимость металла, α_N термоэлектрический коэффициент в нормальном металле, а ϵ_F энергия Ферми.

Соотношение на коэффициент α_N следует из формулы Мотта в металле:

$$\alpha_N \approx - \frac{\pi^2 T}{3e} \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon \approx \epsilon_F} \quad (2)$$

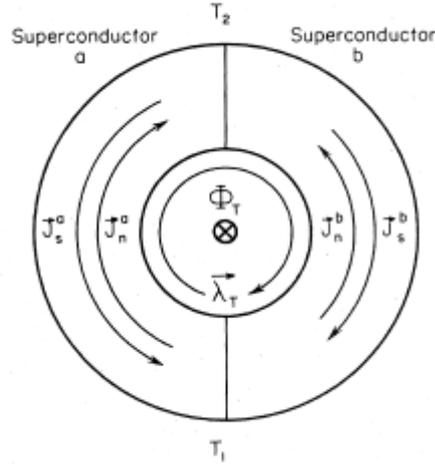
Проводимость, в свою очередь, зависит от времени релаксации. Меняется она на энергиях порядка фермиевских, откуда появляется малый параметр $\frac{T}{\epsilon_F}$, который делает коэффициент малым.

Если мы хотим, чтобы коэффициент был большим, нужно каким-то образом "избавиться" от члена $\frac{T}{\epsilon_F}$. Для этого нужно, чтобы зависимость времени релаксации от энергии была более резкой.

Такую зависимость, может дать, например, механизм Андреевского отражения, при котором электрон при налетании на контактный потенциал отражается дыркой, и наоборот. Если каким-то образом вероятность этого процесса для электронов и дырок будет разной, то в системе появится нужная нам асимметрия.

Если метал становится сверхпроводящим, то электрическое поле не может проникнуть в сверхпроводник, а потому выражение тока

Рис. 1: кольцо из двух сверхпроводников



дается

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \alpha \nabla T \quad (3)$$

где \mathbf{j}_s сверхток, а α термоэлектрический ток в сверхпроводнике. Отсюда следует, что в отдельно взятом изотропном изолированном сверхпроводнике с градиентом температур, сверхток в точности компенсируется термоэлектрическим током $\mathbf{j}_s = -\alpha \nabla T$. Гинзбург показал [1, 2], что в случае неоднородного сверхпроводника такой компенсации в общем случае не происходит. Позже были проведены эксперименты [5, 6], в которых ток измерялся косвенно посредством измерения магнитного потока через замкнутый контур.

"Хорошим" примером расхождения теории с экспериментом является эксперимент [5], результаты которого $\alpha(T) = 2 \times 10^3 \alpha(T_c) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}$ - корневая расходимость при критической температуре, полностью расходится с теоретическим результатом, полученным в [3], $\alpha(T) \lesssim \alpha(T_c)$.

Ниже будет приведено решение двух задач. Первая — расчет термоэлектрического тока на границе сверхпроводник - нормальный

металл, когда два его конца находятся при разных температурах T_1 и T_2 в предположении, что потенциал на границе описывается δ -потенциалом Рашбы, вытекающим из спин-орбитального взаимодействия [7]. Другая - находение напряжения между нормальным металлом и сверхпроводником в NSNSN структуре.

2 Термоэлектрический ток вблизи границы с контактным потенциалом Рашбы

Данная задача может возникать при модификации вышеприведенного эксперимента [5], когда на один из сверхпроводников напылен нормальный металл.

Как будет показано ниже, потенциал Рашбы не будет создавать ток даже при наличии градиента температур.

Вся дальнейшая задача решается в единицах, где $\hbar = 1$.

2.1 Нахождение S-матрицы

Рассмотрим планарный N-S контакт, как показано на рисунке. Потенциал на границе может быть описан выражением:

$$U(x) = [U_0 + U_1(\mathbf{n}, [\hat{\sigma}, \hat{\mathbf{k}}])]\delta(x) \quad (4)$$

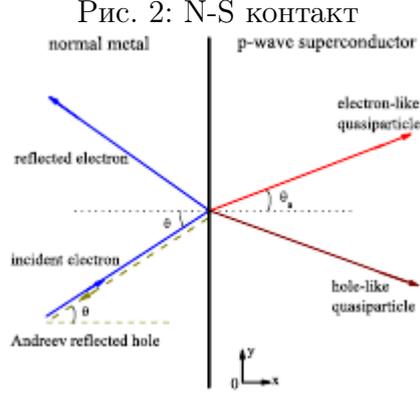
где $\mathbf{n} \equiv \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$ — волновой вектор, он же импульс в нашей системе единиц, а $\hat{\sigma}$ — матрицы Паули.

Уравнения Боголюбова-де Жена расщепляются по спину

$$\mathcal{H}_\sigma \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (5)$$

где $\sigma = \pm$ в зависимости от знака проекции спина на ось z.

Для получения данного результата рассмотрим действие оператора $U_1(\mathbf{n}, [\hat{\sigma}, \hat{\mathbf{k}}])$ на волновую функцию вида $\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | \pm \rangle$, учитывая, что ось z всегда перпендикулярна импульсу. Делаем



циклическую перестановку в смешанном произведении и получаем для потенциала Рашбы выражение

$$\hat{U}_R = U_1(\hat{\sigma}, [\mathbf{n}, \hat{\mathbf{k}}_{||}]) = U_1 k_{||} \sigma_z \quad (6)$$

откуда при сшивке волновых функций на границе получим, что компоненты с разными проекциями спина не смешиваются в системе уравнений.

Итого, \mathcal{H}_σ из уравнений Боголюбова-де Жена выглядит так:

$$\mathcal{H}_\sigma = \begin{pmatrix} -\frac{\nabla^2}{2m} - E_F + U_\sigma(x) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^\dagger(\mathbf{r}) & \frac{\nabla^2}{2m} + E_F - U_\sigma(x) \end{pmatrix} \quad (7)$$

где $U_\sigma(x) = (U_0 + i\sigma U_1 \nabla_y) \delta(x)$, а E_F энергия Ферми в металле или сверхпроводнике.

Решением уравнений Боголюбова-де Жена является функция вида $\Psi(\mathbf{r}) = e^{ik_y y} \Psi(\mathbf{x})$. Запишем уравнения на волновые функции рассеяния электроноподобного возмущения со стороны металла и сверхпроводника, а также дырочноподобного возмущения со стороны нормального металла и сверхпроводника, сшивая волновые функции на границе. Коэффициенты, соответствующие рассеянию электрона, будем обозначать буквой C , дырки D , функции в сверхпроводнике будем помечать \tilde{C} , \tilde{D} . Нахождение коэффициентов для каждого случая помогает найти один из столбцов S-матрицы. Сверхпроводник находится в области $x > 0$.

2.2 Электроподобное возмущение со стороны металла

Волновая функция со стороны нормального металла

$$\Psi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) = A_{\sigma} e^{ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{\sigma} e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D_{\sigma} e^{ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

со стороны сверхпроводника

$$\Psi_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \tilde{C}_{\sigma} e^{ik_x x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \tilde{D}_{\sigma} e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \quad (9)$$

где

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\Omega}{E}}, v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\Omega}{E}} \quad (10)$$

$$\Omega = \sqrt{E^2 - \Delta^2}$$

Из потенциала следует, что значения самих волновых функций непрерывны на границе, а первая производная по x претерпевает разрыв

$$\begin{aligned} \Psi_S(+0) &= \Psi_N(-0) \\ \Psi'_S(+0) - \Psi'_N(-0) &= 2m(U_0 - \sigma U_1 k_{||}) \Psi_N(-0) \end{aligned} \quad (11)$$

отсюда следует

$$\begin{aligned} A_{\sigma} + C_{\sigma} &= u \tilde{C}_{\sigma} - v \tilde{D}_{\sigma} \\ D_{\sigma} &= v \tilde{C}_{\sigma} + u \tilde{D}_{\sigma} \\ A_{\sigma} - C_{\sigma} &= u \tilde{C}_{\sigma} + v \tilde{D}_{\sigma} + i u_{\sigma} u \tilde{C}_{\sigma} - i u_{\sigma} v \tilde{D}_{\sigma} \\ D_{\sigma} &= v \tilde{C}_{\sigma} - u \tilde{D}_{\sigma} + i u_{\sigma} v \tilde{C}_{\sigma} + i u_{\sigma} u \tilde{D}_{\sigma} \end{aligned} \quad (12)$$

где $u_{\sigma} = \frac{2m}{k_x} (U_0 - \sigma U_1 k_{||})$.

2.3 Дырочное возмущение со стороны металла

Волновая функция со стороны нормального металла

$$\Psi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) = B_{\sigma} e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_{\sigma} e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D_{\sigma} e^{ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

со стороны сверхпроводника

$$\Psi_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \tilde{C}_\sigma e^{ik_x x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \tilde{D}_\sigma e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \quad (14)$$

Из выражений (11) аналогично получаем

$$\begin{aligned} C_\sigma &= u\tilde{C}_\sigma - v\tilde{D}_\sigma \\ B_\sigma + D_\sigma &= v\tilde{C}_\sigma + u\tilde{D}_\sigma \\ -C_\sigma &= u\tilde{C}_\sigma + v\tilde{D}_\sigma + iu_\sigma u\tilde{C}_\sigma - iu_\sigma v\tilde{D}_\sigma \\ -B_\sigma + D_\sigma &= v\tilde{C}_\sigma - u\tilde{D}_\sigma + iu_\sigma v\tilde{C}_\sigma + iu_\sigma u\tilde{D}_\sigma \end{aligned} \quad (15)$$

2.4 Электронное возмущение со стороны сверхпроводника

Волновая функция со стороны нормального металла

$$\Psi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) = C_\sigma e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D_\sigma e^{ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

со стороны сверхпроводника

$$\Psi_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \tilde{A}_\sigma e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \tilde{C}_\sigma e^{ik_x x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \tilde{D}_\sigma e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \quad (17)$$

Из выражений (11) аналогично получаем

$$\begin{aligned} C_\sigma &= u\tilde{A}_\sigma + u\tilde{C}_\sigma - v\tilde{D}_\sigma \\ D_\sigma &= v\tilde{A}_\sigma + v\tilde{C}_\sigma + u\tilde{D}_\sigma \\ -C_\sigma &= (-u + iu_\sigma u)\tilde{A}_\sigma + u\tilde{C}_\sigma + v\tilde{D}_\sigma + iu_\sigma u\tilde{C}_\sigma - iu_\sigma v\tilde{D}_\sigma \\ D_\sigma &= (-v + iu_\sigma v)\tilde{A}_\sigma + v\tilde{C}_\sigma - u\tilde{D}_\sigma + iu_\sigma v\tilde{C}_\sigma + iu_\sigma u\tilde{D}_\sigma \end{aligned} \quad (18)$$

2.5 Дырочное возмущение со стороны сверхпроводника

Волновая функция со стороны нормального металла

$$\Psi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) = C_\sigma e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D_\sigma e^{ik_x x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

со стороны сверхпроводника

$$\Psi_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \tilde{B}_\sigma e^{ik_x x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} + \tilde{C}_\sigma e^{ik_x x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \tilde{D}_\sigma e^{-ik_x x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \quad (20)$$

Из выражений (11) аналогично получаем

$$\begin{aligned} C_\sigma &= -v\tilde{B}_\sigma + u\tilde{C}_\sigma - v\tilde{D}_\sigma \\ D_\sigma &= u\tilde{B}_\sigma + v\tilde{C}_\sigma + u\tilde{D}_\sigma \\ -C_\sigma &= (-v - iu_\sigma v)\tilde{B}_\sigma + u\tilde{C}_\sigma + v\tilde{D}_\sigma + iu_\sigma u\tilde{C}_\sigma - iu_\sigma v\tilde{D}_\sigma \\ D_\sigma &= (u + iu_\sigma u)\tilde{B}_\sigma + v\tilde{C}_\sigma - u\tilde{D}_\sigma + iu_\sigma v\tilde{C}_\sigma + iu_\sigma u\tilde{D}_\sigma \end{aligned} \quad (21)$$

2.6 Вычисление S-матрицы

Все эти уравнения решаются одинаково, так как имеют вид $\mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ где матрица \mathbf{M} одинакова во всех четырех системах, и дается коэффициентами перед волновыми функциями рассеяния. Столбец $\tilde{\mathbf{b}}$ дается коэффициентами перед налетающими волновыми функциями.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & u & -v \\ 0 & 1 & -v & -u \\ 1 & 0 & u(1 + iu_\sigma) & v(1 - iu_\sigma) \\ 0 & 1 & -v(1 + iu_\sigma) & u(1 - iu_\sigma) \end{pmatrix} \quad (22)$$

Подставляя по очереди столбцы $\tilde{\mathbf{b}}$ и решая системы, получаем S-матрицу

$$\tilde{\mathbf{S}}_\sigma = \frac{1}{\tilde{K}} \begin{pmatrix} -(1 + \omega_0^2)r_\sigma^* & -4\omega_0 & d_\sigma u(1 + \omega_0^2) & \frac{\omega_0(K - r_\sigma^* - d_\sigma^*)}{2} \\ 4\omega_0 & -(1 + \omega_0^2)r_\sigma & \frac{\omega_0(K - r_\sigma^* - d_\sigma^*)}{2} & d_\sigma^* u(1 + \omega_0^2) \\ \frac{1}{u}d_\sigma & \frac{\omega_0(K - r_\sigma - d_\sigma)}{2} & -(1 + \omega_0^2)r_\sigma^* & 4\omega_0 \\ \frac{\omega_0(K - r_\sigma - d_\sigma)}{2} & \frac{1}{u}d_\sigma^* & -4\omega_0 & -(1 + \omega_0^2)r_\sigma \end{pmatrix} \quad (23)$$

где $\omega_0 = \frac{v}{u}$; $r_\sigma = \frac{u_\sigma^2 - 2iu_\sigma}{4 + u_\sigma^2}$; $d_\sigma = \frac{4 - 2iu_\sigma}{4 + u_\sigma^2}$; $K = 4 + u_\sigma^2$, $\tilde{K} = K + \omega_0^2 u_\sigma^2$.

Эти выражения взяты из вида S-матрицы для контакта металл-металл того же потенциала.

$$\mathbf{S}_\sigma = \begin{pmatrix} r_\sigma & d_\sigma^* \\ d_\sigma & -r_\sigma^* \end{pmatrix} \quad (24)$$

2.7 Выражение для тока

Оператор тока дается выражением

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{e}{m} \sum_{E_n > 0} \left[\{u_n^*(\mathbf{r})\hat{\mathbf{p}}u_n - u_n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{p}}u_n^*\} \langle b_n^+ b_n \rangle + \{v_n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{p}}v_n^* - v_n^*(\mathbf{r})\hat{\mathbf{p}}v_n\} \langle b_n b_n^+ \rangle \right] \quad (25)$$

Найдем ток у границы со стороны нормального металла, учитывая, что $\langle b_n^+ b_n \rangle = n_f$ — концентрации Ферми, а также то, что групповая скорость дырки направлена в противоположную сторону от её импульса, получим вклад для поверхностного тока от волновой функции \tilde{A}_σ , при условии, что $k_{||} > 0$:

$$j(r)_{||} = \frac{ek_{||}}{m} \left[|C_{\sigma\tilde{A}}(k_{||})|^2 \tilde{n}_e(\tilde{T}_1) - |D_{\sigma\tilde{A}}(k_{||})|^2 (1 - \tilde{n}_e(\tilde{T}_1)) \right] \quad (26)$$

и вклад от той же самой функции при условии $k_{||} < 0$:

$$j(r)_{||} = -\frac{ek_{||}}{m} \left[|C_{\sigma\tilde{A}}(-k_{||})|^2 \tilde{n}_e(\tilde{T}_2) - |D_{\sigma\tilde{A}}(-k_{||})|^2 (1 - \tilde{n}_e(\tilde{T}_2)) \right] \quad (27)$$

Важно, что коэффициенты S-матрицы зависят как от $k_{||}$, так и от σ через член $u_\sigma = \frac{2m}{k_x}(U_0 - \sigma U_1 k_{||})$. Из последнего выражения следует, что $F_\sigma(-k_{||}) = F_{-\sigma}(k_{||})$, где F — любой коэффициент S-матрицы. Таким образом, вспоминая, что помимо вклада с положительной проекцией спина есть вклад с отрицательной:

$$j(r)_{||} = \frac{ek_{||}}{m} \left[|C_{-\sigma\tilde{A}}(k_{||})|^2 \tilde{n}_e(\tilde{T}_1) - |D_{-\sigma\tilde{A}}(k_{||})|^2 (1 - \tilde{n}_e(\tilde{T}_1)) \right] \quad (28)$$

и вклад от той же самой функции при условии $k_{||} < 0$:

$$j(r)_{||} = -\frac{ek_{||}}{m} \left[|C_{-\sigma\tilde{A}}(-k_{||})|^2 \tilde{n}_e(\tilde{T}_2) - |D_{-\sigma\tilde{A}}(-k_{||})|^2 (1 - \tilde{n}_e(\tilde{T}_2)) \right] \quad (29)$$

Группируя накрест , получим, что формально можно проводить суммирование по членам типа

$$j(r)_{\parallel} = \frac{2ek_{\parallel}}{m} \left\{ \left[|C_{\sigma\tilde{A}}(k_{\parallel})|^2(\tilde{n}_e(\tilde{T}_1) - \tilde{n}_e(\tilde{T}_2)) + |D_{\sigma\tilde{A}}(k_{\parallel})|^2(\tilde{n}_e(\tilde{T}_1) - \tilde{n}_e(\tilde{T}_2)) \right] \right\} \quad (30)$$

по всем σ .

Учитывая теперь такой же вклад от \tilde{B}_{σ} :

$$j(r)_{\parallel} = \frac{2ek_{\parallel}}{m} \left\{ \left[|C_{\sigma\tilde{B}}(k_{\parallel})|^2(\tilde{n}_h(\tilde{T}_2) - \tilde{n}_h(\tilde{T}_1)) + |D_{\sigma\tilde{B}}(k_{\parallel})|^2(\tilde{n}_h(\tilde{T}_2) - \tilde{n}_h(\tilde{T}_1)) \right] \right\} \quad (31)$$

увидим, что он в точности противоположен вкладу от \tilde{A}_{σ} , так как $\tilde{n}_e = \tilde{n}_h$, а сумма квадратов модулей коэффициентов из одного столбца S-матрицы равна аналогичной сумме для другого столбца, и весь вклад обнуляется.

Из аналогичных свойств симметрии S-матрицы сократится и вклад от функций, налетающих со стороны нормального металла.

Таким образом мы получим, что поверхностный термоэлектрический отсутствует.

2.8 Выводы по задаче с потенциалом Рашбы

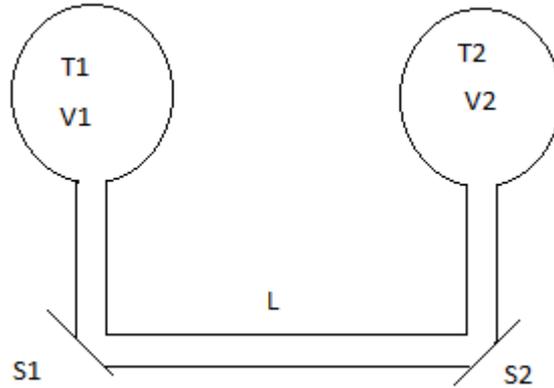
Похожая задача по нахождению кондактанса с тем же потенциалом решалась в [8, 9], где вместо изотропного сверхпроводника рассматривался p-wave и d-wave сверхпроводник соответственно. Коэффициенты S-матрицы для случая металл-металл и для случая металл-сверхпроводник (там, где они были посчитаны в данных работах), совпал с точностью до обозначений.

Результат также мог быть предсказан исходя из того, что большой ток мог появиться только при образовании связанных Андреевских состояний, как в работе [10]. Однако спин-орбитальное взаимодействие не может образовать связанное Андреевское состояние в s-сверхпроводнике, так как спин-орбитальное взаимодействие коммутирует с обращением по времени, следовательно, куперов-

ская пара не может быть разрушена потенциалом Рашбы. Это соответствует тому, что диагональные элементы матрицы рассеяния равны по модулю. При внимательном рассмотрении можно понять, что свойство $F_\sigma(-k_{||}) = F_{-\sigma}(k_{||})$, из-за которого обнуляется ток, также следует из обращения по времени.

3 Задача об NSNSN структуре

Рис. 3: схема модели



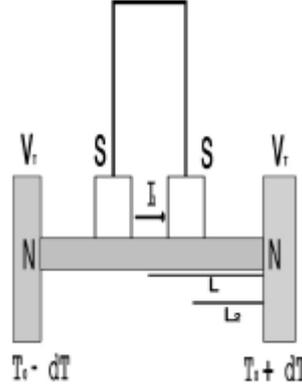
Вторая задача состояла в нахождении стационарного режима в данной структуре, как на рисунке. Для простоты будет рассматриваться простейшая траектория прохождения, когда частица ударяется только о сверхпроводники. В стационарном режиме ожидается, что у резервуаров будут устанавливаться напряжения V_1, V_2 , компенсируя асимметрию из-за отражений на сверхпроводниках. В данной задаче именно напряжения являются термоэлектрическим эффектом. Нужный нам эффект должен достигаться, так как время релаксации тут порядка времени пролета $\frac{d}{v_F}$, а не $\frac{1}{\varepsilon_F}$.

Задача о стационарном режиме между сверхпроводником и нормальным металлом, а также о токах в SNS контактах имеет множество вариантов в зависимости от конфигурации сверхпроводников и нормального металла [11, 12, 13]. Данная задача является моделью для схемы из [11]

Методический интерес представляет ток в средней перемычке, так как он, по сути, при равенстве температур, должен быть Джозефсоновским.

В простейшем случае больших параллельных планарных контактов ток описывается формулой Ишии для эффекта Джозефсо-

Рис. 4: два сверхпроводника и нормальный металл



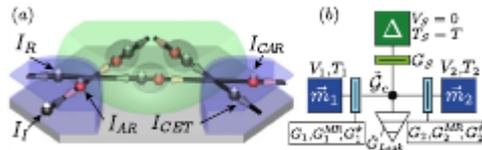
на [14, 15]

$$j \sim \sin \chi \times e^{\frac{-2\pi T d}{v_F}}, \quad (32)$$

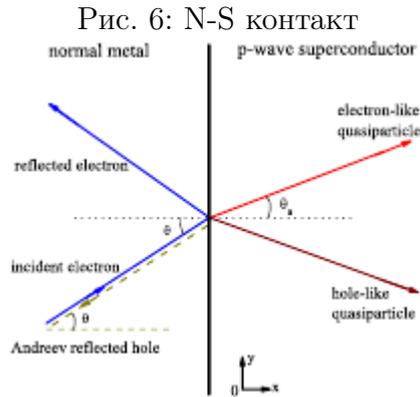
где d - ширина прослойки нормального металла, v_F - скорость Ферми, T - температура, χ - разница фаз двух сверхпроводников. В данной конфигурации формула для напряжений не обязана быть такой, более того, в двух "резервуарах" ожидаются разные потенциалы V_1, V_2 . Так как напряжения V_1, V_2 отвечают неравновесному состоянию, их зависимость от длины перемычки d ожидается не экспоненциальной, а степенной.

3.1 Модель

Рис. 5: два металла и один сверхпроводник



В качестве модели возьмем баллистический режим, т.е. такой,



что электроны и дырки из резервуара до NS границы будут долетать без столкновений. Температуры резервуаров T_1 и T_2 В нашей задаче соответственно. $d \gg \xi$, где ξ - длина когерентности.

Будем также считать, что скорость электронов и дырок практически равна скорости Ферми. Также будем считать, что контакт немагнитный, пренебрегая, таким образом, спиновой зависимостью коэффициентов рассеяния. В данной модели, как будет показано дальше, можно будет найти V_1, V_2 и j .

Для этого будет нужно получить вид волновых функций пролета дырок и электронов, подставить их в оператор тока, получить выражения для токов в правом и левом колене и приравнять их нулю. Так мы получим уравнения на напряжения.

Вся дальнейшая задача решается в единицах, где $\hbar = 1$.

4 Нахождение S-матрицы

Рассмотрим планарный N-S контакт, как показано на рисунке. Наша задача получить коэффициенты S матрицы через коэффициенты той же S матрицы для N-N контакта. Пусть сверхпроводник находится в области $x > 0$.

В нашей задаче контакт немагнитный, то есть нет зависимости от спина. Также сделаем приближение, что $T \ll |\Delta|$ (чтобы

учитывать вклад только подщелевых токов). Параметр порядка в глубине постоянен.

Тогда уравнения Боголюбова-де Жена [16] выглядят так:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \xi_p & |\Delta|e^{i\chi} \\ |\Delta|e^{-i\chi} & -\xi_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (33)$$

Если представить волновую функцию как $u(x)e^{\pm ip_F x}$, то уравнения Боголюбова-де-Жена перейдут в уравнения Андреева, если считать $u(x)$ медленной функцией координат [18].

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mp iv_x \partial_x & |\Delta|e^{i\chi} \\ |\Delta|e^{-i\chi} & \pm iv_x \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (34)$$

пусть теперь $u = u_e e^{i\alpha x}$ тогда, обнуляя детерминант и находим $\alpha = \pm i \frac{\sqrt{|\Delta|^2 - \varepsilon^2}}{v_x}$

Амплитуды со знаком + перед p_F обозначим индексом 1, иначе 2. Решая систему, получим 4 возможных типа коэффициентов, соответствующих налетающим и улетающим дыркам и электронам. В нашей задаче интересны только налетающее со стороны нормального металла частицы, то есть нужны электроноподобные возмущения с индексом 1 и дырочноподобные возмущения с индексом 2. Знак перед α надо выбрать +, тогда волновая функция будет затухать вглубь сверхпроводника. При решении уравнений получим следующие отношения:

$$\frac{u_{s1}}{v_{s1}} = e^{i\theta+i\chi} \quad (35)$$

$$\frac{u_{s2}}{v_{s2}} = e^{-i\theta+i\chi} \quad (36)$$

где $e^{i\theta} = \frac{\varepsilon - i\sqrt{|\Delta|^2 - \varepsilon^2}}{\Delta}$

В итоге, волновая функция со стороны металла выглядит так:

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{\varepsilon x}{v_x}} e^{ipx} + A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\varepsilon x}{v_x}} e^{ipx} + A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\varepsilon x}{v_x}} e^{-ipx} + A_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\frac{\varepsilon x}{v_x}} e^{-ipx} \quad (37)$$

Со стороны сверхпроводника:

$$B_1 \begin{pmatrix} u_{s1} \\ v_{s1} \end{pmatrix} e^{-\frac{\sqrt{|\Delta|^2 - \varepsilon^2} x}{v_x}} e^{ipx} + B_4 \begin{pmatrix} u_{s2} \\ v_{s2} \end{pmatrix} e^{-\frac{\sqrt{|\Delta|^2 - \varepsilon^2} x}{v_x}} e^{-ipx} \quad (38)$$

4.1 Нахождения коэффициентов S-матрицы сверхпроводник-металл

Пользуясь коэффициентами нормальной S-матрицы и рассматривая область размером много меньше ξ , длинны когерентности, но много больше атомного масштаба, можно получить соотношение [17]:

$$\begin{pmatrix} B_1 u_{s1} \\ A_3 \\ B_1 v_{s1} \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_e & 0 \\ 0 & S_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_4 u_{s2} \\ A_1 \\ B_4 v_{s2} \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (39)$$

где

$$S_e = S_h = \begin{pmatrix} \sqrt{R} & i\sqrt{D} \\ i\sqrt{D} & \sqrt{R} \end{pmatrix} \quad (40)$$

две одинаковые матрицы 2×2 , отвечающие рассеянию электронов и дырок в случае контакта металл-металл. Соотношение получено исходя из того, что при налетании на потенциал на таких масштабах имеет значение только знак в показателе быстроосциллирующей экспоненты, и задача на связь указанных коэффициентов аналогична задаче нахождение S-матрицы в случае металл-металл.

Чтоб решить уравнение для налетающего электрона, надо положить $A_1 = 1$; $A_4 = 0$, для дырки - наоборот. Решая две системы, и помня о соотношениях (35), (36), получим для электрона:

$$A_2 = \frac{D e^{-i(\chi + \theta)}}{1 - R e^{-2i\theta}} \quad (41)$$

- амплитуда андреевского отражения

$$A_3 = \frac{\sqrt{R}(1 - e^{-2i\theta})}{1 - R e^{-2i\theta}} \quad (42)$$

- амплитуда нормального отражения. для дырки

$$A_2 = \frac{De^{i(\chi-\theta)}}{1 - Re^{-2i\theta}} \quad (43)$$

- амплитуда андреевского отражения

$$A_3 = -\frac{\sqrt{R}(1 - e^{-2i\theta})}{1 - Re^{-2i\theta}} \quad (44)$$

У этих коэффициентов наблюдается простая связь, если ввести операцию \tilde{a} , меняющую фазу сверхпроводника в выражении:

$$\begin{aligned} n_h = -n_e &= -\frac{\sqrt{R}(1 - e^{-2i\theta})}{1 - Re^{-2i\theta}} \\ a_h = \tilde{a}_e &= \frac{De^{i(\chi-\theta)}}{1 - Re^{-2i\theta}} \end{aligned} \quad (45)$$

где a - амплитуда андреевского отражения, а n - нормального. Имеет смысл также выделить фазу сверхпроводника:

$$\begin{aligned} a &= \frac{De^{-i\theta}}{1 - Re^{-2i\theta}} \\ n &= \frac{\sqrt{R}(1 - e^{-2i\theta})}{1 - Re^{-2i\theta}} \end{aligned} \quad (46)$$

если же вспомнить про приближение, что $\varepsilon \ll \Delta$, то $e^{-2i\theta} \approx -1$, и тогда операция смены фазы превратится просто в комплексное сопряжение:

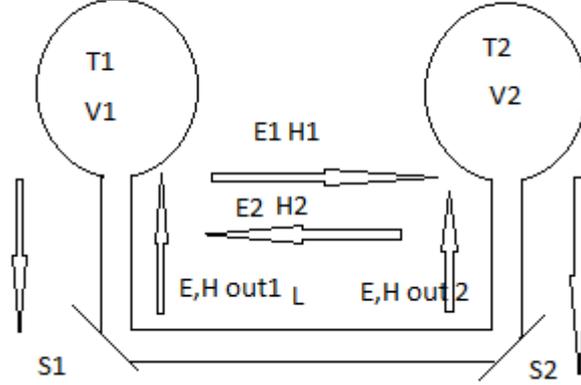
$$a_e = \frac{-iDe^{-i\chi}}{1 + R} \quad (47)$$

$$b_e = \frac{2\sqrt{R}}{1 + R} \quad (48)$$

и

$$a_h = a_e^*; n_h = -n_e^* \quad (49)$$

Рис. 7: Схема распространения частиц



4.2 Нахождение уравнений на потенциалы

Уравнения на потенциалы в установившемся режиме можно получить из условий того, что ток в перемычках к резервуарам - нулевой. Запишем оператор тока, пользуясь тем, что в больших резервуарах электроны и дырки находятся в состоянии термодинамического равновесия:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{e}{m} \sum_{E_n > 0} \left[\{u_n^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} u_n - u_n(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} u_n^*\} \langle b_n^+ b_n \rangle + \{v_n(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} v_n^* - v_n^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} v_n\} \langle b_n b_n^+ \rangle \right] \quad (50)$$

Очевидно, нам нужно получить вид волновой функции для четырех возможных случаев - налетание электрона или дырки из резервуара 1 или 2. Все это - разные случаи, так как сверхпроводник 1 и 2 различаются как минимум фазой. Пусть нам известна S-матрица NS контакта. Тогда мы сможем записать систему линейных уравнений, связывающее волновые функции распространения электронов и дырок в системе. Из уравнения Андреса в приближении малости энергий по сравнению с импульсом Ферми, получаем вид волновой функции электрона или дырки $\Psi \sim e^{\pm ipx} e^{\pm \frac{i\epsilon x}{v_F}}$. Коэффициенты перед этими экспонентами связывает две системы, соответствующие сшивке волновых функций на границах со сверх-

проводниками. Те, в свою очередь, задаются S-матрицами. В системе будет 8 переменных и 4 неоднородных члена. Запишем систему, учитывая, что в центральной перемычке набегают разности фаз. Неоднородные члены выпишем в отдельный столбец, отделенный |

Для сверхпроводника 1

$$E_1 = H_2 e^{-i\alpha} e^{i\beta} a_{1h} | + E_{in1} n_{1e} \quad (51)$$

$$H_1 = E_2 e^{i\alpha} e^{i\beta} a_{1e} | + H_{in1} n_{1h} \quad (52)$$

$$E_{out1} = E_2 e^{i\alpha} e^{i\beta} n_{1e} | + H_{in1} a_{1h} \quad (53)$$

$$H_{out1} = H_2 e^{-i\alpha} e^{i\beta} n_{1h} | + E_{in1} a_{1e} \quad (54)$$

Для сверхпроводника 2

$$E_2 = H_1 e^{-i\alpha} e^{i\beta} a_{2h} | + E_{in2} n_{2e} \quad (55)$$

$$H_2 = E_1 e^{i\alpha} e^{i\beta} a_{2e} | + H_{in2} n_{2h} \quad (56)$$

$$E_{out2} = E_1 e^{i\alpha} e^{i\beta} n_{2e} | + H_{in2} a_{2h} \quad (57)$$

$$H_{out2} = H_1 e^{-i\alpha} e^{i\beta} n_{2h} | + E_{in2} a_{2e} \quad (58)$$

$$\alpha = p_F l; \beta = \frac{l\varepsilon}{v_F}$$

где коэффициенты E, H соответствуют дырочным и электронным волновым функциям. Индексы 1 и 2 означают отлетание от сверхпроводников 1 и 2 соответственно.

Элементы S-матрицы были представлены в следующем виде - тип налетающей частицы отображается в индексах e, h. Номер резервуара, из которого вылетела частица, соответствует индексу 1 или 2.

Для решения системы будет полезной связь на дырочные и электронные коэффициенты (49). Перепишем всю систему через электронные амплитуды и выделим фазу сверхпроводника.

Для каждого типа волновой функции в системе меняется лишь неоднородный столбец. Поэтому, воспользовавшись свойством 49,

и обнуляя соответствующие амплитуды для разных налетающих функций, получим формулы коэффициентов. Отдельно выпишем их же в случае малых энергий.

4.3 Электрон из первого резервуара

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \\ E_{out1} \\ H_{out1} \\ E_2 \\ H_2 \\ E_{out2} \\ H_{out2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{1+a_2 a_1^* e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_1+a_2(n_1^2+a_1^2)e^{i(2\beta-\chi)}}{1+a_2 a_1^* e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \\ \frac{a_2 n_1 e^{i(\alpha+\beta)}}{1+a_2 a_1^* e^{i(2\beta-\chi)}} \\ \frac{n_2 n_1 e^{i(\alpha+\beta)}}{1+a_2 a_1^* e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

в случае малых энергий

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \\ E_{out1} \\ H_{out1} \\ E_2 \\ H_2 \\ E_{out2} \\ H_{out2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{1+a_2 a_1 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_1+a_2 e^{i(2\beta-\chi)}}{1+a_2 a_1 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \\ \frac{a_2 n_1 e^{i(\alpha+\beta)}}{1+a_2 a_1 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ \frac{n_2 n_1 e^{i(\alpha+\beta)}}{1+a_2 a_1 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$D_1^{e-e} = \left| \frac{n_2 n_1}{1 + a_2 a_1 e^{i(2\beta-\chi)}} \right|^2 \quad (61)$$

$$R_1^{e-h} = \left| \frac{a_1 + a_2 e^{i(2\beta-\chi)}}{1 + a_2 a_1 e^{i(2\beta-\chi)}} \right|^2 \quad (62)$$

4.4 Дырка из первого резервуара

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \\ E_{out1} \\ H_{out1} \\ E_2 \\ H_2 \\ E_{out2} \\ H_{out2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_1^*}{1+a_2^*a_1e^{i(2\beta+\chi)}} \\ \frac{a_1+a_2(n_1^2+a_1^2)e^{i(2\beta+\chi)}}{1+a_2^*a_1e^{i(2\beta+\chi)}} \\ 0 \\ \frac{-a_2n_1e^{-i(\alpha-\beta)}}{1+a_2^*a_1e^{i(2\beta+\chi)}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{n_2n_1e^{-i(\alpha-\beta)}}{1+a_2^*a_1e^{i(2\beta+\chi)}} \end{pmatrix} \quad (63)$$

в случае малых энергий

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \\ E_{out1} \\ H_{out1} \\ E_2 \\ H_2 \\ E_{out2} \\ H_{out2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_1^*}{1+a_2a_1e^{i(2\beta+\chi)}} \\ \frac{a_1+a_2e^{i(2\beta+\chi)}}{1+a_2a_1e^{i(2\beta+\chi)}} \\ 0 \\ \frac{-a_2^*n_1^*e^{-i(\alpha-\beta)}}{1+a_2a_1e^{i(2\beta+\chi)}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{n_2^*n_1^*e^{-i(\alpha-\beta)}}{1+a_2a_1e^{i(2\beta+\chi)}} \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$D_1^{h-h} = \left| \frac{n_2n_1}{1+a_1a_2e^{i(2\beta+\chi)}} \right|^2 \quad (65)$$

$$R_1^{h-e} = \left| \frac{a_1+a_2e^{i(2\beta+\chi)}}{1+a_1a_2e^{i(2\beta+\chi)}} \right|^2 \quad (66)$$

4.5 Электрон из второго резервуара

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \\ E_{out1} \\ H_{out1} \\ E_2 \\ H_2 \\ E_{out2} \\ H_{out2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a_1 n_2 e^{i(\alpha+\beta)}}{1+a_1 a_2^* e^{i(2\beta+\chi)}} \\ \frac{n_2 n_1 e^{i(\alpha+\beta)}}{1+a_1 a_2^* e^{i(2\beta+\chi)}} \\ 0 \\ \frac{n_2}{1+a_1 a_2^* e^{i(2\beta+\chi)}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_2+a_1(n_2^2+a_2^2)e^{i(2\beta+\chi)}}{1+a_1 a_2^* e^{i(2\beta+\chi)}} \end{pmatrix} \quad (67)$$

при малых энергиях

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \\ E_{out1} \\ H_{out1} \\ E_2 \\ H_2 \\ E_{out2} \\ H_{out2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a_1 n_2 e^{i(\alpha+\beta)}}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta+\chi)}} \\ \frac{n_2 n_1 e^{i(\alpha+\beta)}}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta+\chi)}} \\ 0 \\ \frac{n_2}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta+\chi)}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_2+a_1 e^{i(2\beta+\chi)}}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta+\chi)}} \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$D_2^{e-e} = \left| \frac{n_2 n_1}{1 + a_1 a_2 e^{i(2\beta+\chi)}} \right|^2 \quad (69)$$

$$R_2^{e-h} = \left| \frac{a_2 + a_1 e^{i(2\beta+\chi)}}{1 + a_1 a_2 e^{i(2\beta+\chi)}} \right|^2 \quad (70)$$

4.6 Дырка из второго резервуара

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \\ E_{out1} \\ H_{out1} \\ E_2 \\ H_2 \\ E_{out2} \\ H_{out2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a_1 n_2 e^{-i(\alpha-\beta)}}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{n_2 n_1 e^{-i(\alpha-\beta)}}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \\ \frac{n_2}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta+\chi)}} \\ \frac{a_2 + a_1 (n_2^2 + a_2^2) e^{i(2\beta-\chi)}}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \\ E_{out1} \\ H_{out1} \\ E_2 \\ H_2 \\ E_{out2} \\ H_{out2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a_1^* n_2^* e^{-i(\alpha-\beta)}}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{n_2 n_1 e^{-i(\alpha-\beta)}}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \\ \frac{n_2}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ \frac{a_2 + a_1 e^{i(2\beta-\chi)}}{1+a_1 a_2 e^{i(2\beta-\chi)}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$D_2^{h-h} = \left| \frac{n_2 n_1}{1 + a_2 a_1 e^{i(2\beta-\chi)}} \right|^2 \quad (73)$$

$$R_2^{h-e} = \left| \frac{a_2 + a_1 e^{i(2\beta-\chi)}}{1 + a_2 a_1 e^{i(2\beta-\chi)}} \right|^2 \quad (74)$$

4.7 Уравнение на потенциалы

В дальнейшем будем решать задачу в приближении малых энергий, так как иначе придется учитывать и токи из сверхпроводников.

Выписанные коэффициенты являются коэффициентами прохождения всей системы или коэффициентами отражения назад в резервуар. Получившиеся нули соответствуют тому, что при прохождении испытывается четное число андреевских отражений, а при

отражении назад - нечетное число андреевских отражений. Коэффициенты R и D будут входить в выражения для токов в перемычках к резервуарам. Выпишем их:

$$j_1 \sim \int_{-\varepsilon_c}^{\varepsilon_c} \left(f_1(\varepsilon - eV_1)[1 + R_1^{e-h}] - f_1(\varepsilon + eV_1)[1 + R_1^{h-e}] + f_2(\varepsilon + eV_2)[D_2^{h-h}] - f_2(\varepsilon - eV_2)[D_2^{e-h}] \right) d\varepsilon \quad (75)$$

$$j_2 \sim \int_{-\varepsilon_c}^{\varepsilon_c} \left(f_2(\varepsilon - eV_2)[1 + R_2^{e-h}] - f_2(\varepsilon + eV_2)[1 + R_2^{h-e}] + f_1(\varepsilon + eV_1)[D_1^{h-h}] - f_1(\varepsilon - eV_1)[D_1^{e-h}] \right) d\varepsilon \quad (76)$$

Здесь опущены постоянные множители, которые при приравнении токов нулю все равно уйдут. Также были опущены члены без функций распределения, так как у коэффициентов есть следующее свойство из-за симметрии по смене индекса и дырка-электрон одновременно:

$$R_1^{h-e} = R_2^{e-h}; R_1^{e-h} = R_2^{h-e} \quad (77)$$

Заметим также, что $R_1^{h-e} \neq R_1^{e-h}$ при $\chi \neq 0$, то есть в данной системе действительно есть асимметрия по дыркам-электронам, что и даст ненулевые напряжения.

В полученном виде уравнения неудобны, поэтому представляет смысл вычесть их и сложить, чтобы получить два новых:

$$\int [f_1(\varepsilon + eV_1) - f_1(\varepsilon - eV_1)] - [f_2(\varepsilon + eV_2) - f_2(\varepsilon - eV_2)] d\varepsilon = 0 \quad (78)$$

$$\int [f_1(\varepsilon + eV_1)R_1^{h-e} - f_1(\varepsilon - eV_1)R_1^{e-h}] + [f_2(\varepsilon + eV_2)R_2^{h-e} - f_2(\varepsilon - eV_2)R_2^{e-h}] d\varepsilon = 0 \quad (79)$$

Первое уравнение приводит к интересному результату. По сути, если взять область интегрирования по всей оси, то каждая интегрированная скобка есть функция вида $T * const * \frac{eV}{T}$ что приводит

нас к равенству

$$V_1 = V_2 = V \quad (80)$$

Второе уравнение приводит нас к уравнению на само значение V

$$\int [f_1(\varepsilon + eV)R_1^{h-e} - f_1(\varepsilon - eV)R_1^{e-h}] + [f_2(\varepsilon + eV)R_2^{h-e} - f_2(\varepsilon - eV)R_2^{e-h}] d\varepsilon = 0 \quad (81)$$

Равенство напряжений получилось, по видимому, из-за того, что функция распределения частиц не меняется на протяжении всего пути полета, т.е. вследствие баллистического режима.

5 Ток в центральной перемычке

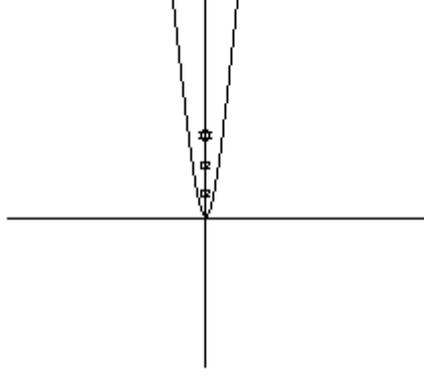
Пользуясь полученными выше коэффициентами, можно также найти выражение для тока в центральной перемычке.

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = \frac{e}{m} \int & \left[|E_1^{e1}|^2 f_1(\varepsilon - eV) - |H_1^{e1}|^2 f_1(-\varepsilon + eV) - |E_2^{h1}|^2 f_1(\varepsilon + eV) + |H_2^{h1}|^2 f_1(-\varepsilon) \right. \\ & \left. - |E_2^{e2}|^2 f_2(\varepsilon - eV) + |H_1^{e2}|^2 f_2(-\varepsilon + eV) + |E_1^{h2}|^2 f_2(\varepsilon + eV) - |H_2^{h2}|^2 f_2(-\varepsilon - eV) \right] \end{aligned} \quad (82)$$

Предположим, что $T_2 - T_1 = \Delta T = 0$ (откуда $V = 0$) и найдем ток.

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{e}{m} \int \left[|E_1^{e1}|^2 f(\varepsilon) - |H_1^{e1}|^2 f(-\varepsilon) - |E_2^{h1}|^2 f(\varepsilon) + |H_2^{h1}|^2 f(-\varepsilon) - \right. \\ & \left. - |E_2^{e2}|^2 f(\varepsilon) + |H_1^{e2}|^2 f(-\varepsilon) + |E_1^{h2}|^2 f(\varepsilon) - |H_2^{h2}|^2 f(-\varepsilon) \right] N(0) d\varepsilon \\ &= \frac{e}{m} \int \left[f(\varepsilon) (|E_1^{e1}|^2 - |E_2^{h1}|^2 - |E_2^{e2}|^2 + |E_1^{h2}|^2) + \right. \\ & \left. + f(-\varepsilon) (-|H_1^{e1}|^2 + |H_2^{h1}|^2 + |H_1^{e2}|^2 - |H_2^{h2}|^2) \right] N(0) d\varepsilon \end{aligned} \quad (83)$$

Рис. 8: Схема распространения частиц



Квадрат модуля амплитуды можно разбить на сумму двух комплексно сопряженных функций, одна из которых будет иметь вычеты только сверху, а другая - только снизу. Рассмотрим пока знаменатель наших коэффициентов:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 + a_1 a_2 e^{i(2\beta \pm \chi)})(1 + a_1^* a_2^* e^{-i(2\beta \pm \chi)})} = \\ & = \frac{1}{2(1 - |a_1|^2 |a_2|^2)} \left(\frac{(1 - a_1 a_2 e^{i(2\beta \pm \chi)})}{(1 + a_1 a_2 e^{i(2\beta \pm \chi)})} + \frac{(1 - a_1^* a_2^* e^{-i(2\beta \pm \chi)})}{(1 + a_1^* a_2^* e^{-i(2\beta \pm \chi)})} \right) \end{aligned} \quad (84)$$

Если же мы теперь соберем члены с одинаковыми знаменателями в скобках, то получим, что в числителе будет множитель $|a_1|^2 |n_2|^2 + |n_1|^2$, который, если вспомнить, что сумма вероятностей 1 равен $(1 - |a_1|^2 |a_2|^2)$, и сокращается со знаменателем.

Таким образом, действительно, интеграл для тока распадается на два интеграла функций, аналитичных в верхней и нижней полуплоскости. Функция распределения имеет вычеты на мнимой оси, поэтому выгнем в верхней полуплоскости контур так, как показано на рисунке. Ниже будет показано, что только первый вычет $\varepsilon = iT\pi$ даст значимый вклад. Также надо учесть, что при аналогичном выгибании в нижней полуплоскости вычеты нужно брать

с обратным знаком, так как их обход идет по часовой стрелке.

Собирая в первой скобке все функции, аналитичные сверху, получим

$$\frac{(1 - a_1 a_2 e^{i(2\beta - \chi)})}{(1 + a_1 a_2 e^{i(2\beta - \chi)})} - \frac{(1 - a_1 a_2 e^{i(2\beta + \chi)})}{(1 + a_1 a_2 e^{i(2\beta + \chi)})} = \frac{4i \sin \chi a_1 a_2 e^{i2\beta}}{(1 + a_1 a_2 e^{i(2\beta + \chi)})(1 + a_1 a_2 e^{i(2\beta - \chi)})} \quad (85)$$

Переходя к суммированию по вычетам, замечаем, что в точке первого вычета $e^{i2\beta} = e^{-\frac{2\pi T d}{v}}$ — малый параметр, и, оставляя только ведущий член, получаем вклад вида:

$$-\frac{eN(0)vTa_1a_2}{\pi} \sin \chi e^{-\frac{2\pi T d}{v}}$$

. Вклад из нижней полуплоскости будет очевидно комплексно сопряженным данному.

Остался вклад с дырочными членами. Он даст ту же величину, что и электронный, т.к. у всей суммы противоположный знак, но при этом вычет так же имеет противоположный знак. Вспоминая также приближение малых энергий, можем выкинуть комплексное сопряжение.

Итого ток:

$$j = -\frac{4eN(0)vTa_1a_2}{\pi} \sin \chi e^{-\frac{2\pi T d}{v}} \quad (86)$$

6 Вычисление напряжения

Теперь можно перейти к вычислению напряжения. Будем считать, что $T_2 - T_1 = \Delta T \ll T$ (откуда $eV \ll T$). Тогда уравнение (81) перейдет в уравнение вида:

$$\int -\frac{\varepsilon \Delta T}{T} \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} [R_1^{h-e} - R_1^{e-h}] d\varepsilon = 2eV \int \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} [R_1^{h-e} + R_1^{e-h}] d\varepsilon \quad (87)$$

Стоит заметить, что коэффициенты отражения - периодичные функции по энергии и разлагаются в ряд Фурье по членам вида

$\cos\left(\frac{2n\epsilon d}{v}\right)$ и $\sin\left(\frac{2n\epsilon d}{v}\right)$ а так же константе. Так как знаменатель нигде не обращается в ноль на действительной оси, ряд Фурье сходится равномерно. Сойдутся и интегралы, разложенные в ряд. Нам нужны интегралы вида

$$I(a, b) = \int \frac{\cos(ax)}{\cosh^2(bx)} dx = \frac{a\pi}{2b^2 \sinh \frac{a\pi}{2b}} \approx \frac{a\pi}{b^2} e^{-\frac{a\pi}{2b}} \quad (88)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial a} = \int \frac{x \sin(ax)}{\cosh^2(bx)} dx \approx \frac{a\pi^2}{b^3} e^{-\frac{a\pi}{2b}} \quad (89)$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(bx)} dx = \frac{2}{b} \quad (90)$$

Как видно, нам нужен наименьший показатель экспоненты, который даст лишь первая гармоника в случае разницы коэффициентов, и нулевая в случае суммы. Тогда, подставляя выражения в равенство и сокращая экспоненты, получаем

$$eV = \frac{2\pi dT}{v} \pi \Delta T \frac{c_-}{c_+} \sin \chi e^{-\frac{2\pi Td}{v}} \quad (91)$$

где c_+ , c_- коэффициенты Фурье первых гармоник для суммы и разности.

7 Заключение

В модели контактного потенциала Рашбы не удалось получить термоэлектрический коэффициент, так как там не образуются связанные Андреевские состояния из-за свойств спин-орбитального взаимодействия.

В схеме NSNSN в модели длинного контакта и низких температур были получены выражения для тока в перемычке и напряжения между сверхпроводниками металлом. Это стало возможным из-за образования "квазисвязанных" Андреевских состояний.

Напряжение получилось экспоненциально спадающим от расстояния и нечетным образом зависящим от фазы по периодическому закону. Однако, члена вида $\frac{T}{\varepsilon_F}$ в выражении, как не трудно заметить, отсутствует. Вместо него появился член $\frac{2\pi dT}{v}$, как и предполагалось в начале. Напряжение резервуаров 1 и 2 сравниваются при низких температурах, что, по видимому, является свойством баллистического режима. Само ненулевое напряжение получилось из-за того, что коэффициенты прохождения дырок и электронов из одного и того же резервуара различались при ненулевой фазе сверхпроводника.

Формула для тока совпала по виду с формулой Ишии для эффекта Джозефсона, хоть и имеет другой предэкспоненциальный множитель, что было ожидаемо. В данной конфигурации связанных Андреевских состояний, как в работах [19, 20] не образуется, сами состояния размываются, однако ток берется с помощью тех же приемов, так как ведущий вклад все равно равновесный, и может быть подсчитан с помощью мацубаровских функций Грина.

Судя по виду напряжения, таким же (или похожим методом) может быть посчитано и напряжение, что является достаточно неожиданным результатом.

Список литературы

- [1] V.L. Ginzburg, Zh. Eksp. Teor. Fiz.14, 177 (1944).
- [2] V.L. Ginzburg, Sov. Phys. Usp.34(2), 101 (1991).
- [3] Yu.M. Gal'perin, V.L. Gurevich, and V.I. Kozub, Zh.Eksp.Teor.Fiz.66, 1387(1974)
- [4] M.S. Kalenkov, A.D. Zaikin, L.S. Kuzmin, Phys. Rev. Lett. 109, 147004 (2012)
- [5] D.J. Van Harlingen, D.F. Heidel, and J.C. Garland, Phys.Rev. B21, 1842 (1980).
- [6] N.V. Zavaritskii, JETP Lett.19, 126 (1974).
- [7] E. I. Rashba, Fiz. Tverd. Tela (Leningrad) 2, 1224 (1960)[Sov. Phys. Solid State 2, 1109 (1960)].
- [8] S.Wu and K.V.Samokhin, Phys.Rev. B81,214506(2010)
- [9] S.Wu and K.V.Samokhin, Phys.Rev. B82,184501(2010)
- [10] T. Löfwander and M.Fogelström, Phys.Rev.B70,024515 (2004).
- [11] R. Seviour and A. F. Volkov Phys. Rev. B 62, R6116(R)
- [12] A. F. Volkov and V. V. Pavlovskii Phys. Rev. B 72, 014529
- [13] P. Machon, M. Eschrig, and W. Belzig Phys. Rev. Lett. 110, 047002
- [14] C. Ishii, Prog. Theor. Phys. 44, 1525 (1970)
- [15] Kulik, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 57, 1745 (1969) Sov. Phys. JETP 30, 944 (1970)
- [16] П. Де Жен, Сверхпроводимость металлов и сплавов, М., Мир, 1968.

- [17] G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk Phys. Rev. B 25, 4515
- [18] Свидзинский, Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости, 1982
- [19] Andreev, A. F. (1964). Sov. Phys. JETP 19: 1228.
- [20] Mikhail S. Kalenkov and Andrei D. Zaikin Phys. Rev. B 90, 134502