

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Кафедра проблем физики и астрофизики

Магистерская
диссертация

**Эффекты окружения на динамику
антиферромагнитного слоя после быстрого изменения
взаимодействия**

студента 028 группы
И.В. Блинова

выполненная под научным руководством

д.ф.-м.н, профессора МГУ

А.Н. Рубцова

и

д.ф.-м.н, члена-корреспондента РАН

П.И. Арсеева.

ФИАН, 2016

Оглавление

1	Введение	2
1.1	Синхронизованные осцилляции щели	3
1.2	Затухание Ландау	3
1.3	Экспоненциальное затухание	3
2	Задача и модель	4
3	Равновесная фазовая диаграмма	5
3.1	Эффективное действие	5
3.2	Преобразование Хаббарда-Стратоновича	6
3.3	Среднее поле	6
4	Динамика замкнутой системы	9
4.1	Предел большого U_i	11
4.2	Переходное U_i	12
4.2.1	Первый порядок	12
4.2.2	Третий порядок	13
4.3	Предварительные итоги	14
5	Динамика открытой системы	16
5.1	Уравнения движения	16
5.2	Стационарный случай	17
5.3	Линейное по возмущению приближение	17
5.4	Режим слабо затухающих колебаний	20
5.5	Сильное затухание	20
5.6	Итоги	22
6	Заключение	24

Глава 1

Введение

Как правило, выведенная из равновесия система, стремится прийти к некоторому равновесному, стационарному состоянию, ей доступному. Такое поведение присуще даже системам, где столкновений нет. Первый известный пример такой системы – бесстолкновительная электронная плазма, в которой происходит диссипация энергии из моды коллективной в микроскопические степени свободы. Такой механизм [1] был впервые предсказан Львом Ландау и был назван в его честь затуханием Ландау.

Механизм, стоящий за затуханием Ландау, может быть качественно объяснен с помощью следующего мысленного эксперимента: представим себе малое возмущение плотности плазмы, генерирующего гармоническую электромагнитную волну. Такая волна распространяется в пространстве, заполненном заряженными частицами, которые взаимодействуют только с электрическим полем, ими созданным, но не непосредственно друг с другом. Часть из этих частиц будет расположена ниже по энергии, чем максимумы потенциала электромагнитной волны. Такие частицы будут "запертыми" в определенном минимуме потенциала. В случае, если частица обладает скоростью, большей групповой скорости волны, догоняя "склон" потенциала, она будет им тормозиться и, в свою очередь, разгонять волну. Более медленные частицы, наоборот, будут волну тормозить. Таким образом, если частиц, более медленных, чем коллективная мода, больше, мы будем иметь затухание коллективной моды на индивидуальных степенях свободы частиц.

Как оказалось позднее, такой эффект присущ не только бесстолкновительной плазме, но и другой системе с коллективной модой – модели Бардина-Купера-Шриффера [2] сверхпроводимости.

В такой системе существует два временных масштаба – время релаксации квазичастиц τ_q и τ_Δ , возникающий из-за наличия в системе щели. Затухание Ландау возникает в случае, если время релаксации квазичастиц мало $\tau_q \ll \tau_\Delta$. В противном случае динамика системы описывается динамическим уравнением Гинзбурга-Ландау.

Позднее, почти через 30 лет после работы Горькова и Элиашберга, динамика системы, описываемая гамильтонианом

$$H = \sum_k \epsilon_k c_k^\dagger c_k + g \Delta c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger + h.c.,$$

где $\Delta = \sum_k c_{k,\uparrow} c_{-k,\downarrow}$, была исследована и для случаев существенно нерав-

новесных начальных условий.

Именно, задача ставилась следующая: после резкого изменения спаривания с щелью g с начального значения g_i до g_f конденсат претерпевает некоторую эволюцию. Описать эту эволюцию.

Так, в работах [3] было показано, что динамика БКШ-сверхпроводника интегрируема. В последующих работах того же коллектива [4, 5, 6, 7] и другого [8] было показано, что динамика конденсата может идти по трем различным сценариям.

1.1 Синхронизованные осцилляции щели

В случае, если мы резко изменяем параметр взаимодействия с очень маленького g_i до большого g_f , происходят незатухающие осцилляции щели $\Delta = g_f \sum_k c_{k,\uparrow} c_{-k,\downarrow}$. Режим, стоящим за этим феноменом, хорошо описан в [9]: коллективная мода, выделенная БКШ-нестабильностью, синхронизирует различные квазичастицы. Пользуясь качественным описанием затухания в плазме, можно сказать, что из-за наличия щели в спектре возбуждений, может реализоваться случай, когда вблизи энергии коллективной моды никаких частиц нет. Именно это и происходит в данном режиме.

1.2 Затухание Ландау

Постановка задачи здесь похожа на работу Ландау 70-летней давности [1]. А именно, предполагается, что $|g_i - g_f| \ll |g_i|$. Слабое изменение параметра взаимодействия ведет, как и в [1], к перекачке энергии между коллективной модой и квазичастицами, лежащими на краях щели. Эволюция в пределе бесконечного времени в этом случае приходит к некоторому стационарному состоянию, в общем случае отличному как от начального, так и от основного для g_f .

1.3 Экспоненциальное затухание

В случае, противоположном описанному первому ($g_i \gg g_f$), происходит экспоненциально быстрое закрытие щели вплоть до нуля. Эффект был наглядно объяснен в [8] через введение эффективной температуры, описывающей систему после релаксации: она оказалась выше, чем температура сверхпроводящего перехода.

Глава 2

Задача и модель

Мы ставим задачу исследования динамики двумерной фермионной системы, связанной с бозонным резервуаром магнонов. Вся система описывается гамильтонианом Хаббарда с бозонным резервуаром на каждом сайте:

$$H = H_f + H_b + H_c \quad (2.1)$$

где, соответственно:

$$H_f = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k^f c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + U \sum_{k_1,k_2,q} c_{k_1+q,\uparrow}^\dagger c_{k_1,\uparrow} c_{k_2-q,\downarrow}^\dagger c_{k_2,\downarrow} \quad (2.2)$$

$$H_b = \sum_{k,\Omega} \epsilon_\Omega^b \bar{b}_{k\Omega}^\dagger \bar{b}_{k\Omega} \quad (2.3)$$

$$H_c = g \sum_{k,q,\Omega} S(q) (\bar{b}_{q\Omega}^\dagger + \bar{b}_{-q\Omega}) \quad (2.4)$$

здесь $\epsilon_k^f = 4J(\cos(k_x) + \cos(k_y)) + \mu$ - дисперсия фермионов, $c_{k\sigma}^\dagger$ и $c_{k\sigma}$ - фермионные операторы рождения и уничтожения, бозоны $\bar{b}_{k\Omega}^\dagger \bar{b}_{k\Omega}$ векторны и имеют плотность состояний, соответствующую омическому случаю: $\rho(\Omega) = \Omega e^{-\frac{\Omega}{\Lambda}}$, с высокоэнергетической обрезкой Λ , компонента спина $S(q)$ определяется как $S(q) = \frac{1}{2} \sum_k c_{k\alpha}^\dagger c_{k-q\beta} \bar{\tau}_{\alpha\beta}$.

Более конкретно:

1. Можем ли мы наблюдать те же динамические режимы в замкнутой системе¹, что и в БКШ-конденсате?
2. Всегда ли открытая система релаксирует в основное состояние?
3. Чем определяется динамика системы на больших временах – окружением или электронной подсистемой.

¹Мы будем говорить "замкнутая система" тогда, когда имеем ввиду систему, описываемую гамильтонианом H_f и "открытая" – полным гамильтонианом H .

Глава 3

Равновесная фазовая диаграмма

Прежде чем приступить к изучению неравновесной динамики, мы для начала намерены изучить систему, описываемую (2.1) в положении равновесия. Более конкретно, нас интересует вопрос, не испытывает ли система фазового перехода из-за наличия бозонной термостата.

3.1 Эффективное действие

Для начала напомним действие части, где присутствуют бозоны:

$$\mathcal{S}_{b+c} = \int_0^\beta d\tau \int_{q,\Omega} \bar{\phi}_{k\Omega}^a (\partial_\tau + \epsilon_\Omega^b) \phi_{k\Omega}^a + g S^a(q) (\bar{\phi}_{q\Omega}^a + \phi_{-q\Omega}^a) \quad (3.1)$$

здесь ϕ - бозонное комплексное поле, а надстрочный индекс a просто используется для того, чтобы подчеркнуть векторную природу бозонного поля. Запишем теперь статистическую сумму всей системы через функциональный интеграл:

$$\mathcal{Z} = \int D(\bar{\phi}, \phi) D(\bar{\psi}, \psi) e^{-\mathcal{S}_f - \int_0^\beta d\tau \int_{q,\Omega} \bar{\phi}_{k\Omega}^a (\partial_\tau + \epsilon_\Omega^b) \phi_{k\Omega}^a - g S^a(q) (\bar{\phi}_{q\Omega}^a + \phi_{-q\Omega}^a)} \quad (3.2)$$

Беря теперь интеграл по бозонным степеням свободы и пренебрегая постоянным множителем $\det G$, получим:

$$\mathcal{Z} = \int D(\bar{\psi}, \psi) e^{-\mathcal{S}_f + g^2 \sum_n \int_q S^a(q, \omega_n) G_{\omega_n}^{-1} S^a(-q, -\omega_n)} \quad (3.3)$$

где введено обозначение:

$$G^{-1}(\omega_n) = \int_\Omega \frac{1}{-i\omega_n + \epsilon_\Omega^b} = \Lambda + \omega_n e^{-\frac{i\omega_n}{\Lambda}} \left(Si\left(\frac{\omega_n}{\Lambda}\right) - iCi\left(\frac{\omega_n}{\Lambda}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.4)$$

с четными частотами Мацубары ω_n , а также $S^a(q, \omega_n) = \sum_{\omega_n} \int_k \frac{1}{2} \bar{\psi}_{k, \omega_m, \alpha} \psi_{k-q, \omega_m - \omega_n, \beta} \tau_{\alpha\beta}^a$ с нечетными ω_m и четными ω_n частотами Мацубары¹.

¹Заметим, что влияние бозонов свелось к ренормализации взаимодействия. Легко также заметить, что, если считать бозонное поле классическим, то $G(\omega_n) = \Lambda$. Таким обра-

Таким образом, полное эффективное действие можно записать как:

$$S_{eff} = \sum_{\sigma, \omega_m} \int_k (\epsilon_k^f - i\omega_m) \bar{\psi}_{k\sigma} \psi_{k\sigma} - \sum_{\sigma, \omega_n} \int_q \left(\frac{2U}{3} + g^2 G^{-1}(\omega_n, q) \right) S^a(q, \omega_n) S^a(-q, -\omega_n) \quad (3.5)$$

Для удобства дальнейшей записи обозначим $U_R(\omega_n) = \frac{2U}{3} + g^2 G^{-1}(\omega_n)$

3.2 Преобразование Хаббарда-Стратоновича

Теперь наша задача - построить теорию среднего поля на базе (3.5). Для этой цели мы введем вспомогательное бозонное поле ϕ_q^a . В некотором роде, мы придем к тем же полям, с которых мы и начинали в (3.2). Однако, в этот раз мы следующим шагом будем уже интегрировать фермионы. Используя тождество для векторного поля M_{q, ω_n} :

$$1 \equiv \int DM \exp \left[- \sum_{\omega_n} \int_q \left((U_R(-\omega_n))^{-1} M_{q, \omega_n} M_{-q, -\omega_n} \right) \right] \quad (3.6)$$

и смещая переменную $M_{q, \omega_n} \rightarrow M_{q, \omega_n} + U_R(\omega_n) S_{q, \omega_n}$:

$$1 \equiv \int DM \exp \left[- \int_q \left((U_R(-\omega_n))^{-1} M_q M_{-q} + \frac{U_R(\omega_n)}{U_R(-\omega_n)} S_q M_{-q} + \frac{U_R(-\omega_n)}{U_R(\omega_n)} S_{-q} M_q + U_R(\omega_n) S_q S_{-q} \right) \right] \quad (3.7)$$

где q на самом деле 3-вектор, состоящий из частотной и импульсной частей: $q = (q, \omega_n)$. Наконец, домножая (3.7) на (3.3) и обозначая $\frac{U_R(\omega_n)}{U_R(-\omega_n)} = u(\omega_n)$, получим действие с расцепленным взаимодействием:

$$S_{hs} = \int_q (U_R(\omega_n))^{-1} M_q M_{-q} + u(\omega_n) S_q M_{-q} + u(-\omega_n) S_{-q} M_q + \int_k (\epsilon_k^f - i\omega_m) \bar{\psi}_{k\sigma} \psi_{k\sigma} \quad (3.8)$$

3.3 Среднее поле

Предположим, что единственные существующие компоненты поля M это $M_{Q,0} = M_{-Q,0} = \frac{1}{2}M$, где $Q = (\pi, \pi)$, тогда все действие принимает вид:

$$S_{mf} = \frac{1}{2} U_R(0)^{-1} M^2 + 2S_Q M + \int_k (\epsilon_k^f - i\omega_m) \bar{\psi}_{k\sigma} \psi_{k\sigma} \quad (3.9)$$

Вспомним, что $S_Q^a = \frac{1}{2} \int_k \bar{\psi}_{k\alpha} \psi_{k-Q\beta} \tau_{\alpha\beta}^a$, тогда получим действие

$$S_{mf} = \frac{1}{2} (U_R(0))^{-1} M^2 + M \int_{k \in up} \bar{\psi}_{k\alpha} \psi_{k-Q\beta} \tau_{\alpha\beta}^a + M \int_{k \in up} \bar{\psi}_{k-Q\alpha} \psi_{k\beta} \tau_{\alpha\beta}^a + \int_{k \in up} (\epsilon_k^f - i\omega_m) \bar{\psi}_{k\sigma} \psi_{k\sigma} + \int_{k \in up} (-\epsilon_k^f - i\omega_m) \bar{\psi}_{k-Q\sigma} \psi_{k-Q\sigma}, \quad (3.10)$$

где $k \in up$ обозначает тот факт, что интегрирование ведется по верхней полуплоскости. Теперь, вводя спиноры $\Psi_k = (\psi_{k\sigma}, \psi_{k-Q\sigma})$ и ломая ротаци-

зом, уже здесь можно сделать вывод о том, что в пренебрежении квантовости термостата, никакого перехода нет – фазовая диаграмма содержит только антиферромагнитную фазу.

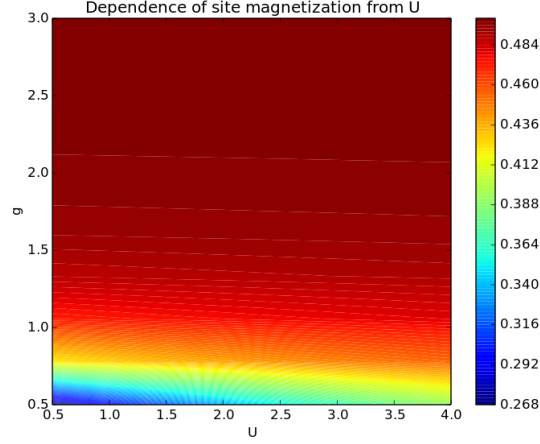


Рис. 3.1: Фазовая диаграмма открытой системы в среднеполевом приближении.

онную симметрию $\mathbf{M} = (0, 0, M)$, представим действие в виде:

$$\mathcal{S}_{mf} = \frac{1}{2}(U_R(0))^{-1}M^2 + \int_{k \in up} \Psi_{k\sigma}^\dagger \hat{G}_{mf}^{-1} \Psi_{k\sigma}, \quad (3.11)$$

где теперь:

$$\hat{G}_{mf}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} (\epsilon_k^f - i\omega_m) & M\tau_{\alpha,\beta}^z \\ M\tau_{\alpha,\beta}^z & (-\epsilon_k^f - i\omega_m) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Теперь, интегрируя фермионные моды в (3.11), получим:

$$\mathcal{S}_{mf} = \frac{1}{2}(U_R(0))^{-1}M^2 - \text{Tr}(\ln(\hat{G}_{mf}^{-1})), \quad (3.13)$$

Через уравнение на стационарную точку действия $\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta M} = 0$ получим уравнение самосогласования на макрополе M :

$$(U_R(0))^{-1}M = \text{Tr}(\hat{G}_{mf} \frac{\delta}{\delta M} \hat{G}_{mf}^{-1}), \quad (3.14)$$

или

$$\frac{1}{\frac{2U}{3} + g^2\Lambda} = \sum_m \int_{k>0} \frac{1}{\epsilon_k^2 + \omega_m^2 + M^2}, \quad (3.15)$$

где f у дисперсии было для краткости опущено. Просуммировав по частотам Мацубары, можем, наконец, придти к уравнению на макрополе, аналогичному тому, что возникает в модели Бардина-Купера-Шриффера для щели

$$\frac{1}{\frac{2U}{3} + g^2\Lambda} = \int_{k>0} \frac{\tanh(\frac{\epsilon_k^2 + M^2}{T})}{\sqrt{\epsilon_k^2 + M^2}}, \quad (3.16)$$

Выясним теперь связь поля M с антиферромагнитным параметром порядка $\langle S_Q \rangle$. Для этого напомним тождество

$$\langle U_R^{-1}M + 2S_Q \rangle = \int DMD\psi \frac{\partial}{\partial M} e^{-\mathcal{S}_{mf}}, \quad (3.17)$$

которое обнуляется в экстремуме действия $\frac{\delta S}{\delta M} = 0$, поэтому в среднеполе-
вом приближении

$$-\frac{U_R^{-1}M}{2} = \langle S_Q \rangle. \quad (3.18)$$

Среднеполевая фазовая диаграмма приведена на Рис.3.3 – как и можно было ожидать, усиление связи с бозонной системой, в которой отсутствуют квантовые флуктуации, ведет только к усилению антиферромагнетизма.

Глава 4

Динамика замкнутой системы

Для определения динамики системы мы будем пользоваться среднеполевым приближением, описанным ранее. Такое приближение, при условии $\tau_\Delta \ll \tau_q$ хорошо описывает динамику системы на временах, меньших τ_q – пока взаимодействия не приведут систему к какому-то равновесию.

В этом приближении дискретизованный гамильтониан замкнутой системы имеет вид:

$$h_{MF} = \sum_k \epsilon(\bar{k}) c_\sigma^\dagger(k) c_\sigma(k) + \frac{2U}{3} |\bar{M}|^2 - \frac{4U}{3} \bar{S}(Q) \bar{M} \quad (4.1)$$

Здесь k - двумерный вектор, находящийся в зоне Бриллюэна, $c(k)$ - фермионные операторы, (π, π) -вектор обозначенный как Q , $\epsilon(\bar{k}) = 4J(\cos(k_x) + \cos(k_y))$, $\bar{S}(Q) = \frac{1}{2} \sum_k c_\alpha^\dagger(k) c_\beta(k+Q) \bar{\tau}_{\alpha\beta}$ и $\bar{M} = \langle \bar{S}(Q) \rangle$.

Мы также выберем определенную симметрию, считая, что спины лежат вдоль оси z . После этого несложно доказать (например, пользуясь видом собственных состояний), что следующие величины

$$\tau_\sigma^x(k) = c_\sigma^\dagger(k) c_\sigma(k+Q) + c_\sigma^\dagger(k+Q) c_\sigma(k) \quad (4.2)$$

$$\tau_\sigma^y(k) = i(c_\sigma^\dagger(k) c_\sigma(k+Q) - c_\sigma^\dagger(k+Q) c_\sigma(k)) \quad (4.3)$$

$$\tau_\sigma^z(k) = c_\sigma^\dagger(k) c_\sigma(k) - c_\sigma^\dagger(k+Q) c_\sigma(k+Q) \quad (4.4)$$

подчиняются следующим симметриям в спиновом пространстве:

$$\langle \tau_\uparrow^x \rangle(k) = -\langle \tau_\downarrow^x \rangle(k),$$

$$\langle \tau_\uparrow^y \rangle(k) = -\langle \tau_\downarrow^y \rangle(k),$$

$$\langle \tau_\uparrow^z \rangle(k) = \langle \tau_\downarrow^z \rangle(k).$$

Далее, с целью упростить обозначения, мы всегда будем под $\tau(k)$ иметь ввиду $\tau_\uparrow(k)$. Легко проверить также, что $\bar{\tau}$ - генераторы $SU(2)$ алгебры.

Используя уравнения Гейзенберга $i \frac{d}{dt} \tau^a(k) = [\tau^a(k), h_{MF}]$, уравнения движения можно записать (4.2)-(4.4) в замкнутой форме:

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\tau} \rangle(k) = 2\bar{B} \times \langle \bar{\tau} \rangle(k) \quad (4.5)$$

где $\bar{B} = \{h_Q, 0, \epsilon(k)\}$, $h_Q = -\frac{4UM}{3}$. Теперь можно заметить, что с точностью до вида дисперсии $\epsilon(k)$ наши уравнения находятся в полном соответствии с уравнениям движения спина в [8]. Хотя подобные уравнения и были выведены ранее [10, 11], речи об интегрируемости [3] такой системы ранее не шло. Легко также понять, что уравнения (4.5) обладают всего двумя стационарными конфигурациями: спины по полю и против поля. Заметим, что среднюю энергию, в терминах новых переменных $\bar{\tau}_k$ можно записать в виде скалярного произведения:

$$E = 2 \int_k (\bar{B}, \bar{\tau}_k), \quad (4.6)$$

где $\bar{B} = \{h_Q, 0, \epsilon(k)\}$. Из этого выражения энергии ясно, что именно конфигурация против поля обладает более низкой энергией. Учитывая также нормировку $\sum_k \tau_k^x = M$, имеем для начального состояния:

$$\tau_k(0) = \left(\frac{-h_i}{2\sqrt{\epsilon_k^2 + h_i^2}}, 0, \frac{-\epsilon_k}{2\sqrt{\epsilon_k^2 + h_i^2}} \right), \quad (4.7)$$

где $h_i = \frac{4U_i M_i}{3}$ с начальным U_i и соответствующим ему равновесным M_i ,

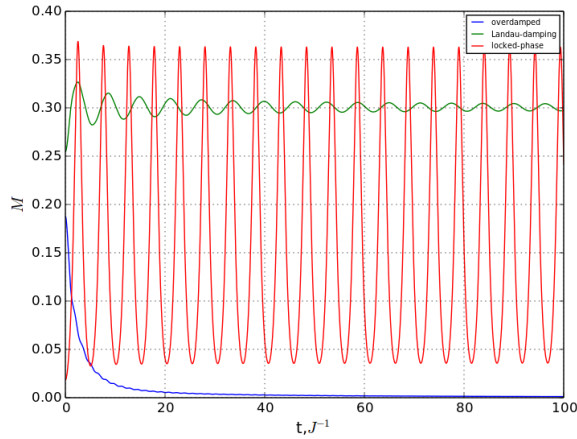


Рис. 4.1: Различные динамические режимы, поддерживаемые системой. Более конкретно, здесь режим сильного затухания для $U_i = 3$, $U_f = 0.5$, затухания Ландау - $U_i = 4$, $U_f = 5$, режим постоянной фазы - $U_i = 0.8$, $U_f = 12$.

вычисленным с помощью (3.16). Уравнения (4.5), как это было показано в [10] обладает несколькими динамическими режимами после квенча $U_i \rightarrow U_f$. Для малой величины квенча, можно показать, линеаризуя уравнения вокруг начальных условий (4.7) и с помощью метода стационарной фазы, что колебания убывает при $\propto \frac{1}{\sqrt{t}}$. Механизм позади этого затухания похож на тот, что уже был описан для плазмы [1] и БКШ ранее: коллективная мода взаимодействует с квазичастицами, расположенными в пространстве энергии, близкой к щели.

Для $U_i \ll U_f$ происходят постоянные колебания параметра порядка. Такое поведение, аналогичное описанному в [9]: коллективная мода, выделен-

ная антиферромагнитной-неустойчивостью исходного состояния, синхронизирует различные квазичастицы.

Когда $U_i \gg U_f$, антиферромагнитный параметр порядка падает до нуля (Рис.4). Однако, оказывается, что в отличии от динамики БКШ-конденсата с дисперсией свободных электронов, где имело место быть экспоненциальное затухание щели, в рассматриваемой системе параметр порядка затухает как $1/t$ ¹. Этот факт ранее описан не был, поэтому остановимся на нем чуть более подробно.

4.1 Предел большого U_i

Оказывается, что для случая $\frac{4}{3}U_i > 8J$ приближенное уравнение на динамику $M(t)$ может быть достаточно легко выведено. Стартуем с начальных условий (4.7) Теперь, предполагая, что при очень малом U_f псевдо спины вращаются так, как будто бы они были невзаимодействующим:

$$M(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi dk_x dk_y e^{2i\epsilon_k t} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_k^2}{h_i^2}}} \quad (4.8)$$

далее, мы разложим это выражение по степеням $\frac{\epsilon_k}{h_i}$

$$M(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi dk_x dk_y e^{2i\epsilon_k t} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_k^2}{\alpha^2}}} = \sum_n \frac{(-1)^n \beta_n}{(2\alpha)^{2n} 2\pi^2} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \int_0^\pi d^2k e^{2i\epsilon_k t} \quad (4.9)$$

Что, в свою очередь, дает нам

$$M(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi dk_x dk_y e^{2i\epsilon_k t} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_k^2}{\alpha^2}}} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{(-1)^n \beta_n}{(2\alpha)^{2n}} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} J_0^2(8Jt) \quad (4.10)$$

где $J_0(4Jt)$ - это функция Бесселя нулевого порядка. В конце концов, в пределе $t \rightarrow \infty$

$$J_0^2(8Jt) \approx \frac{1}{4Jt\pi} \cos^2(8Jt - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8Jt\pi} (1 + \sin(16Jt)) \quad (4.11)$$

После взятия производных (4.10) и опуская все члены ряда кроме $O(1/t)$:

$$M(t) \approx \sum_n \frac{\sin(16Jt)}{16Jt\pi} \frac{\beta_n(8J)^{2n}}{\alpha^{2n}} + \frac{1}{16Jt\pi} = \frac{1}{16Jt\pi} + \frac{\sin(16Jt)}{16Jt\pi \sqrt{1 + \frac{8J}{\alpha}}} \quad (4.12)$$

Это выражение хорошо совпадает с численным результатом, полученным на решетке размером 150×150 (Рис. 4.1).

¹Математически, это следует из того, что уравнения на динамику параметра имеют вид преобразования Фурье $f(t) = \int_a^b f(\epsilon) e^{i\epsilon t}$. В случае сверхпроводника интегрирование ведется с бесконечными a и b . Как следствие – далекие "гармоники" ($t \gg 1/\Delta$) затухают экспоненциально. В случае же приближения сильной связи интервал интегрирования конечен, что ведет в степенному затуханию [12].

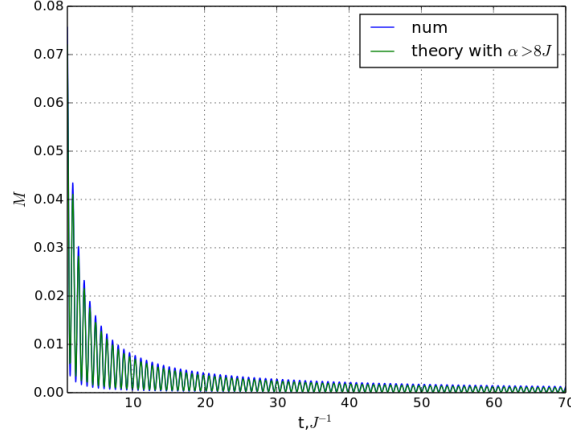


Рис. 4.2: Сравнение численных данных на решетке 150×150 с аналитическим выражением 4.12 с квантом с $U_i = 25$ до $U_f = 0.1$. Начало в $t = 1$.

4.2 Переходное U_i

Интересно также рассмотреть в качестве начального U_i такое, что $|\delta| = |8J - U_i| \ll 8J$ – район, где, вероятно, должен осуществляться переход между двумя режимами.

$$M(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d^2k e^{2i\epsilon_k t} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_k^2}{(8J-\delta)^2}}} \quad (4.13)$$

4.2.1 Первый порядок

Теперь разложим это выражение по $\frac{\delta}{8J}$ до первого порядка:

$$M(t) \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d^2k \frac{e^{2i\epsilon_k t}}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_k^2}{(8J)^2}}} - \frac{\delta}{2\pi^2 (8J)^3} \int_0^\pi d^2k \frac{\epsilon_k^2 e^{2i\epsilon_k t}}{(1 + \frac{\epsilon_k^2}{(8J)^2})^{3/2}} \quad (4.14)$$

Теперь оба члена мы можем разложить по $\epsilon_k/8J$, поскольку это отношение единицы нигде не превышает:

$$M(t) \approx \frac{1}{2\pi^2} \sum_n \frac{\beta_n}{(8J)^{2n}} \int_0^\pi d^2k e^{2i\epsilon_k t} \epsilon_k^{2n} - \sum_n \frac{\gamma_n}{(8J)^{2n+3}} \frac{\delta}{2\pi^2} \int_0^\pi d^2k \epsilon_k^{2n+2} e^{2i\epsilon_k t} \quad (4.15)$$

Теперь, используя результат (4.9), мы получим:

$$M(t) \approx \frac{(-1)^n \beta_n}{(16J)^{2n} 2\pi^2} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \int_0^\pi d^2k e^{2i\epsilon_k t} - \delta \sum_n \frac{(-1)^{n+1} \gamma_n}{(16J)^{2n+3} \pi^2} \frac{d^{2n+2}}{dt^{2n+2}} \int_0^\pi d^2k e^{2i\epsilon_k t} \quad (4.16)$$

подставляя теперь значение интегралов, получим:

$$M(t) \approx \frac{(-1)^n \beta_n}{(16J)^{2n} 2} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} J_0^2(8Jt) - \delta \sum_n \frac{(-1)^{n+1} \gamma_n}{(16J)^{2n+3}} \frac{d^{2n+2}}{dt^{2n+2}} J_0^2(8Jt) \quad (4.17)$$

в пределе $t \rightarrow \infty$:

$$M(t) \approx \frac{(-1)^n \beta_n}{(16J)^{2n}} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \frac{1}{8Jt\pi} (1 + \sin(16Jt)) - \delta \sum_n \frac{(-1)^{n+1} \gamma_n}{(16J)^{2n+3}} \frac{d^{2n+2}}{dt^{2n+2}} \frac{1}{8Jt\pi} (1 + \sin(16Jt)) \quad (4.18)$$

вплоть до членов порядка $O(1/t)$:

$$M(t) \approx \frac{1}{16Jt\pi} + \frac{\sin(16Jt)}{16Jt\pi\sqrt{2}} - \delta \frac{\sin(16Jt)}{2(8J)^2 t \pi (2)^{3/2}} \quad (4.19)$$

4.2.2 Третий порядок

Пойдем теперь дальше и разложим наш интеграл вплоть до членов порядка $O(\frac{\delta}{8J})^3$:

$$\begin{aligned} M(t) \approx & \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d^2k \frac{e^{2i\epsilon_k t}}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_k^2}{(8J)^2}}} - \frac{\delta}{2\pi^2(8J)^3} \int_0^\pi d^2k \frac{\epsilon_k^2 e^{2i\epsilon_k t}}{(1 + \frac{\epsilon_k^2}{(8J)^2})^{3/2}} - \\ & - \frac{3\delta^2}{4\pi^2(8J)^4} \int_0^\pi d^2k \frac{e^{2i\epsilon_k t} \epsilon_k^2}{(1 + \frac{\epsilon_k^2}{(8J)^2})^{5/2}} + \frac{\delta^3}{4\pi^2(8J)^7} \int_0^\pi d^2k \frac{e^{2i\epsilon_k t} (\epsilon_k^4 - 4(8J)^2 \epsilon_k^2)}{(1 + \frac{\epsilon_k^2}{(8J)^2})^{7/2}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Мы уже знаем, чему равны интегралы по первым членам, поэтому займем-

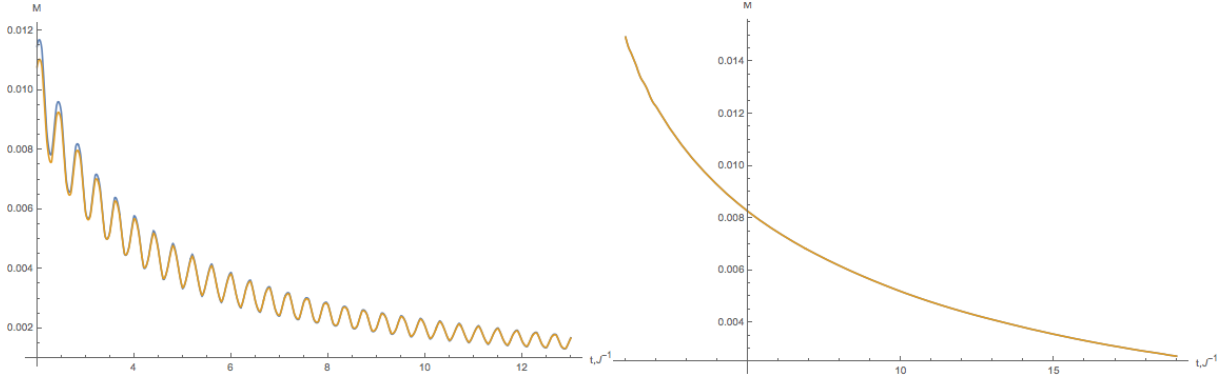


Рис. 4.3: Слева – сравнение точного численного решения (синяя кривая) и выражения(4.24), полученного разложением вокруг $(8J - U_i)/8J = 1$ для $U_i = 4$. Справа – сравнение точного численного решения (синяя кривая) и приближенного численного, полученного разложением вокруг $(8J - U_i)/8J = 1$ до 7 порядка для $U_i = 1$.

ся двумя последними. Исследуем интеграл общего вида:

$$I(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d^2k \frac{e^{2i\epsilon_k t} \epsilon_k^{2l}}{(1 + \frac{\epsilon_k^2}{(8J)^2})^{m/2}}, \quad (4.21)$$

где l – произвольное натуральное число, а m – произвольное нечетное натуральное число.

$$I(t) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_n \gamma_n \int_0^\pi d^2 k e^{2i\epsilon_k t} \frac{\epsilon_k^{2n+2l}}{(8J)^{2n}} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\gamma_n}{(8J)^{2n} (2i)^{2n+2l}} \frac{d^{2n+2l}}{dt^{2n+2l}} J_0^2(8Jt) \quad (4.22)$$

Откуда, для предела большого t , вновь используя (4.11), получим, ограничиваясь только членами порядка $O(1/t)$:

$$I(t) \approx \frac{(8J)^{2l}}{16Jt\pi 2^{m/2}} \sin(16Jt) \quad (4.23)$$

Теперь, пользуясь этим результатом, найдем, что:

$$M(t) \approx \frac{1}{16J\pi t} + \frac{\sin(16Jt)}{16J\pi\sqrt{2}t} - \frac{\delta}{2(8J)^2 t \pi (2)^{3/2}} \sin(16Jt) - \frac{3\delta^2}{4(8J)^3 \pi 2^{5/2} t} \sin(16Jt) - \frac{3\delta^3}{4(8J)^4 \pi 2^{7/2} t} \sin(16Jt) \quad (4.24)$$

Такое приближение дает хорошие результаты вплоть до примерно $U = 4$ (Рис. 4.3, слева). В случае необходимости получения результатов для еще меньших U разложение можно продолжить до членов более высокой степени (Рис. 4.3, справа).

4.3 Предварительные итоги

Мы показали, что замкнутая система обладает фазовой диаграммой (Рис. 4.3), аналогичной той, что имеет сверхпроводник. Таким образом, ответ на первый из вопросов, заданных нами: "Можем ли мы наблюдать те же динамические режимы, что и в БКШ-конденсате?" – утвердительный.

Попутно было выяснено, что режим с быстрым затуханием параметра отличается от соответствующего в БКШ степенным, а не экспоненциальным затуханием.

В подтверждение этого факта были приведены численные вычисления, и, кроме того, аналитические выражения, охватывающие весь интервал параметров.

Кроме того, было выяснено, что наличие в системе еще одного временного масштаба J^{-1} ведет к существенным различиям этого режима при больших по сравнению с J параметрах взаимодействия U_i , где помимо затухания присутствуют также существенные осцилляции параметра порядка с частотой $8J$ и малых, где эти амплитуда этих осцилляций стремится к нулю.

Эти факты, касающиеся сильно затухающего режима, ранее в доступной нам литературе изложены не были.

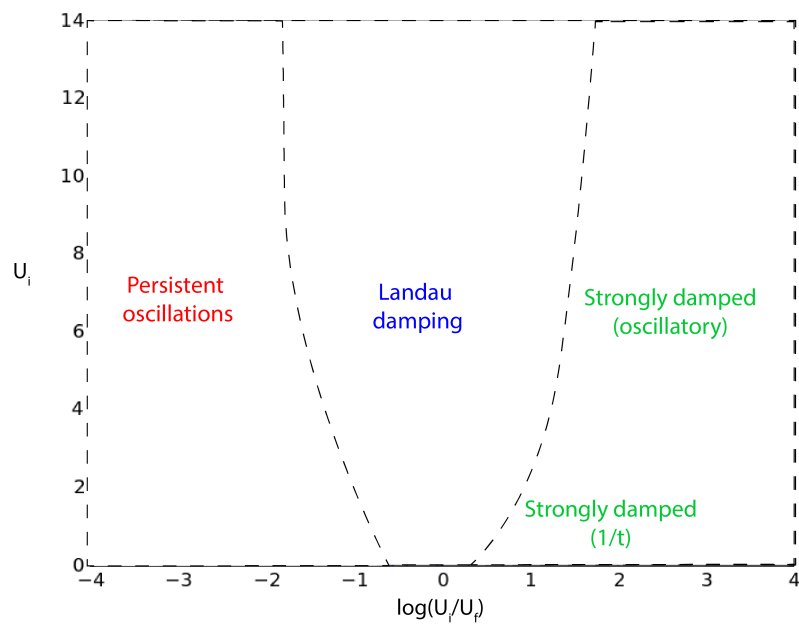


Рис. 4.4: Приблизительная фазовая диаграмма динамических режимов для замкнутой системы. При малом соотношении U_i/U_f возникают осцилляции параметра порядка, затухание Ландау имеет место в области около $U_i/U_f = 1$, быстрое затухание происходит в области $U_i/U_f \gg 1$.

Глава 5

Динамика открытой системы

В прошлом разделе мы обсудили динамику замкнутой системы. Теперь вопрос состоит в том, какие изменения появятся после учета бозонной термостата. Вопросы 2 и 3, касающиеся этого случая, звучат как:

2. Всегда ли открытая система релаксирует в основное состояние?
3. Чем определяется динамика системы на больших временах – окружением или электронной подсистемой.

Для ответа на вопросы мы вновь воспользуемся среднеполевым приближением.

5.1 Уравнения движения

В среднеполевом приближении гамильтониан полной системы:

$$h_{MF} = \epsilon(\bar{k})c_{\sigma}^{\dagger}(k)c_{\sigma}(k) + \frac{2U}{3}|M|^2 - \frac{4U}{3}S(Q)M + gM(b_q^{\dagger} + b_q) + \Omega_q b_q^{\dagger} b_q$$

Уравнение движения для открытой системой имеет вид тот же, что и в (4.5)

$$\frac{d}{dt} \langle \tau \rangle(k) = 2\mathbf{B}_d \times \langle \tau \rangle(k) \quad (5.1)$$

но с другим "псевдополем": теперь у него есть память $\bar{B}_d = \{h_d, 0, \epsilon(k)\}$ где

$$h_d = -\frac{4UM}{3} - 2g^2 \frac{\Lambda M(0)}{1 + \Lambda^2 t^2} - 4g^2 \int_0^t d\tau \frac{\Lambda^3 M(\tau)(t - \tau)}{(1 + \Lambda^2(t - \tau)^2)^2} \quad (5.2)$$

здесь $M(0)$ величина начального антиферромагнитного параметра порядка, $M(t) = \frac{1}{V} \sum \tau^x(k)$ и Λ , как и ранее, высокоэнергетическая обрезка бозонных мод с плотностью состояний $\rho(\epsilon) = \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{\Lambda}}$. Как мы узнали ранее, когда

изучали равновесную фазовую диаграмму, один из эффектов окружения состоит в ренормализации U : $U \rightarrow U + \frac{3g^2\Lambda}{4}$. Поэтому можно предположить, что при очень большом $3g^2\Lambda$ любой режим будет приведен в режим затухания Ландау. Для начала изучим то, как выглядит (5.2) в стационарном случае.

5.2 Стационарный случай

Положим $M(t) \equiv M^i$, тогда

$$h_d = -\frac{4UM^i}{3} - 2g^2\Lambda M^i \quad (5.3)$$

т.е. уравнение движения в стационарном случае имеет вид уравнения открытой системы (4.5) с ренормализованной константой взаимодействия.

Интересно, что, на самом деле, в случае достижения некоторого решения со стационарным M , открытая система в любом случае, независимо от величины возмущения описывается уравнением с псевдополем (5.3) в пределе большого времени. Чтобы показать это, введем некоторое время достижения равновесия T_{eq} и будем считать его много больше характерного времени термостата Λ . Тогда можем написать:

$$h_d = -\frac{4UM}{3} - 2g^2\frac{\Lambda M^i}{1 + \Lambda^2 t^2} - 4g^2 \int_0^{T_{eq}} d\tau \frac{\Lambda^3 M(\tau)(t - \tau)}{(1 + \Lambda^2(t - \tau)^2)^2} - 4g^2 \int_{T_{eq}}^t d\tau \frac{\Lambda^3 M_{eq}(t - \tau)}{(1 + \Lambda^2(t - \tau)^2)^2}$$

Предполагая теперь $t \gg T_{eq}$, получим вплоть до членов линейных по t/T и до второго порядка по $1/(\Lambda t)$:

$$h_d \approx -\frac{4UM_{eq}}{3} - \frac{2g^2 M^i}{\Lambda t^2} - \frac{4g^2}{\Lambda t^3} \int_0^{T_{eq}} d\tau M(\tau) - 2g^2\Lambda M_{eq}(1 - \frac{1}{\Lambda t^2}) \quad (5.4)$$

Что на $t \rightarrow \infty$, как и было ранее сказано, стремится к $h_d \rightarrow -\frac{4UM_{eq}}{3} - 2g^2\Lambda M_{eq}$. Таким образом, уже сейчас можно сказать, что на очень больших временах, после достижения некоего стационарного M_{eq} , эволюция системы определяется электронной подсистемой.

5.3 Линейное по возмущению приближение

Рассмотрим очень малое возмущение $\frac{\delta M}{M^f} \ll 1$ ¹, где $\delta M = M^f - M^i$, M^f и M^i - равновесные для U_f, g и U_i, g значения антиферромагнитного параметра порядка и попробуем для этого случая решить уравнение (5.1). Для этого будем искать решение в виде $\tau_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{S}_{\mathbf{k}}^f + \mathbf{s}_{\mathbf{k}}(t)$, $M(t) = M^f - \delta(t)$, где $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}^f$, равновесное для U_f и g значение псевдоспина. Тогда получим, откидывая

¹Напомним, что в замкнутой системе такое начальное условие соответствует режиму с затуханием Ландау.

члены, квадратичные по $\delta(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{s}_k(t) \approx & 2 \begin{pmatrix} -\frac{4UM^f}{3} - 2g^2 \frac{\Lambda M(0)}{1+\Lambda^2 t^2} - 2g^2 \frac{\Lambda^3 M^f t^2}{1+\Lambda^2 t^2} \\ 0 \\ \epsilon_k \end{pmatrix} \times \mathbf{s}_k(t) \\ & - 2 \begin{pmatrix} -\frac{4U\delta(t)}{3} - 4g^2 \int_0^t d\tau \frac{\Lambda^3 \delta(\tau)(t-\tau)}{(1+\Lambda^2(t-\tau)^2)^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{S}_k^f \end{aligned} \quad (5.5)$$

Несложно проверить (как в разделе для затухания Ландау в замкнутой системе), что второе слагаемое в (5.5) на самом деле приводит к вкладу порядка $O(\frac{\delta M}{M^f})^2$ в уравнении для $M(t)$. Поэтому мы его опустим.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}_k(t) \approx 2 \begin{pmatrix} -\frac{4UM^f}{3} + 2g^2 \frac{\Lambda \delta M}{1+\Lambda^2 t^2} - 2g^2 \Lambda M^f \\ 0 \\ \epsilon_k \end{pmatrix} \times \mathbf{s}_k(t) \quad (5.6)$$

Для времен $t > 1/\Lambda$ такое векторное уравнение дает систему:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s_k^x(t) & \approx -2\epsilon_k s_k^y \\ \frac{d}{dt} s_k^y(t) & \approx 2\epsilon_k s_k^x + 2\left(\frac{4UM^f}{3} - \frac{2g^2 \delta M}{\Lambda t^2} + 2g^2 \Lambda M^f\right) s_k^z \\ \frac{d}{dt} s_k^z(t) & \approx -2\left(\frac{4UM^f}{3} - 2g^2 \frac{\delta M}{\Lambda t^2} + 2g^2 \Lambda M^f\right) s_k^y \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для y компоненты получим уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2} s_k^y(t) \approx -4\epsilon_k^2 s_k^y - 4\left(\frac{4UM^f}{3} - \frac{2g^2 \delta M}{\Lambda t^2} + 2g^2 \Lambda M^f\right)^2 s_k^y + \frac{8g^2 \delta M}{\Lambda t^3} s_k^z \quad (5.8)$$

В этом уравнении давайте избавимся от членов более чем квадратичных по $1/t$, это даст: Для y компоненты получим уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2} s_k^y(t) \approx -4\epsilon_k^2 s_k^y - 4\left(\frac{4UM^f}{3} + 2g^2 \Lambda M^f\right)^2 s_k^y + \frac{16g^2 \delta M}{\Lambda t^2} \left(\frac{4UM^f}{3} + 2g^2 \Lambda M^f\right) s_k^y \quad (5.9)$$

Ясно, что если здесь мы пренебрежем и квадратичными по t членами, это приведет нас к решению, идентичному решению для замкнутой системы с ренормализованными коэффициентами. Действительно, при $t \rightarrow \infty$ решение будет выглядеть как:

$$s_k^y(t) \approx C_k \sin(2\sqrt{\epsilon_k^2 + \left(\frac{4UM^f}{3}\right)^2} t), \quad (5.10)$$

где C_k – неопределенный коэффициент, зависящий от k . Откуда получим, что

$$s_k^x(t) \approx \frac{C_k \epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \left(\frac{4UM^f}{3}\right)^2}} \cos(2\sqrt{\epsilon_k^2 + \left(\frac{4UM^f}{3}\right)^2} t) \quad (5.11)$$

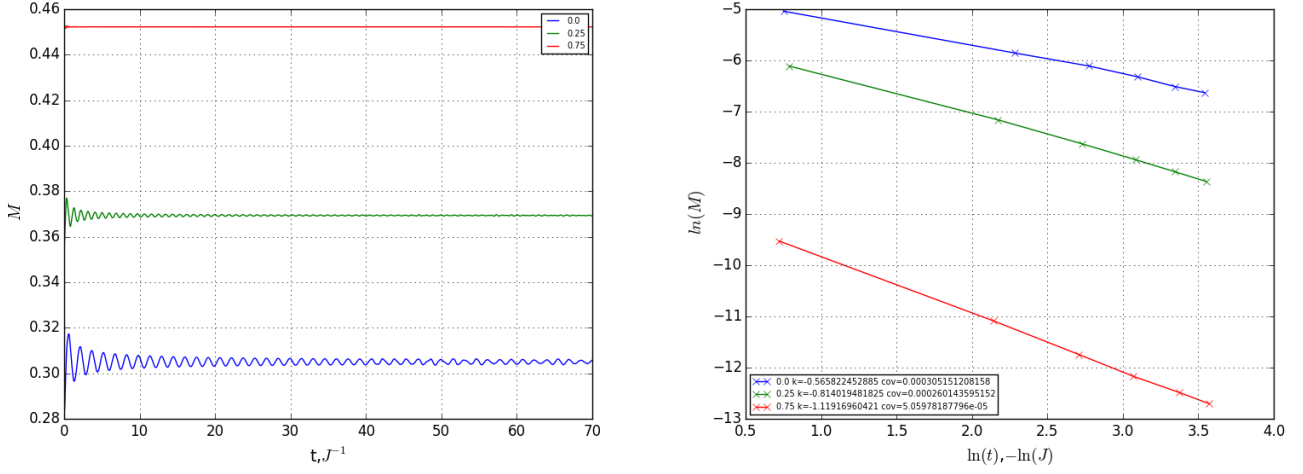


Рис. 5.1: Слева – временная зависимость антиферромагнитного параметра порядка в случае малого возмущения для разных значений связываний с бозонным окружением. Справа – временная зависимость логарифма разницы максимума и среднего на каждом "периоде" построенная в логарифмических осях. Из графика видно, как меняется показатель степени γ во времени. Размер системы: 150×150 , $U_i = 4.5$, $U_f = 5.5$, $\Lambda = 20$, $dT = 0.005$.

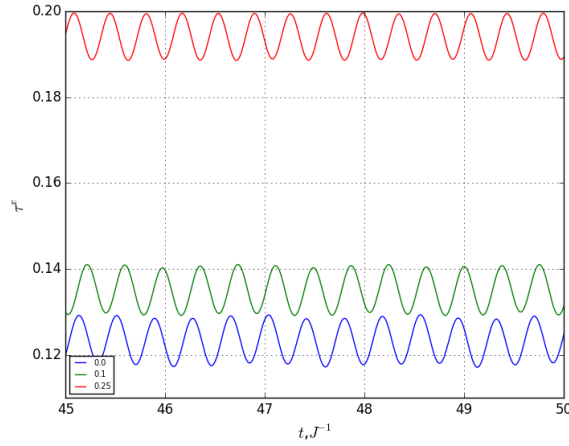


Рис. 5.2: Временная эволюция индивидуальной степени свободы τ_k^x в режиме малого возмущения для нескольких значений g – констант связывания с окружением.

На этом этапе можно дать ответ, что в линейном по возмущению приближении вид эволюции индивидуальных степеней свободы у открытой системы тот же самый, что и у замкнутой [13].

Однако, эволюция коллективной моды $M = \sum_k \tau_k^x$ определяется в том числе и C_k , которые от открытости системы, вообще говоря, зависят.

Так оно и оказывается: несмотря на то, что индивидуальные степени свободы движутся точно также, как и в замкнутой, из-за разницы в распределении коллективная мода затухает быстрее в случае наличия окружения (Рис.5.1 и Рис. 5.2) .

Заметим также, что в случае малого отклонения от равновесия система в ходе временной эволюции в него возвращается на макро уровне, оставаясь, тем не менее, неравновесной.

5.4 Режим слабо затухающих колебаний

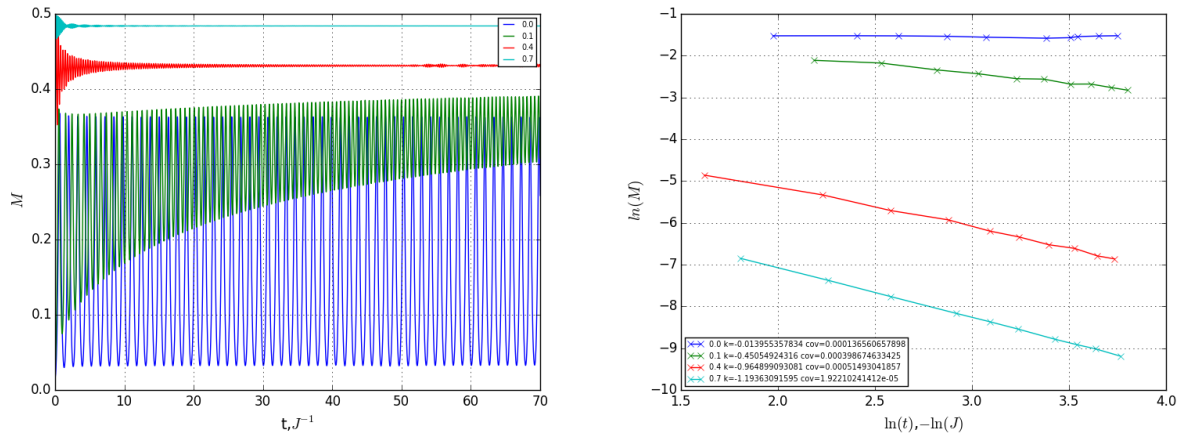


Рис. 5.3: Слева – временная зависимость антиферромагнитного параметра порядка в режиме с большим возмущением в сторону большего U для разных значений связывания с бозонным окружением. Справа – временная зависимость логарифма разницы максимума и среднего на каждом "периоде" построенная в логарифмических осях. Из графика видно, как меняется показатель степени y времени. Размер системы: 100×100 , $U_i = 0.8$, $U_f = 12$, $\Lambda = 20$, $dT = 0.01$.

В режиме с большим возмущением в сторону большего U : U_f такое, что $U_f \gg U_i$ диссипация ведет к равновесной конфигурации (см. Рис. ??). В ходе эволюции во времени, окружение тащит систему к некоторому состоянию похоже на то, что происходило в [9] с тривиальным затуханием.

Амплитуда колебаний, бывшая ранее постоянной (в пределах больших времен), теперь затухает как некоторая степень $\frac{1}{t}$.

Интерпретация такого перехода достаточно проста: наличие щели в замкнутой системе не давало коллективной моде релаксировать. Теперь же, из-за наличия бозонного окружения с непрерывным спектром, возбуждения любой энергии могут быть ей погашены.

5.5 Сильное затухание

Режим с сильным затуханием – единственный режим, в котором при малых значениях g равновесного состояния не достигается.

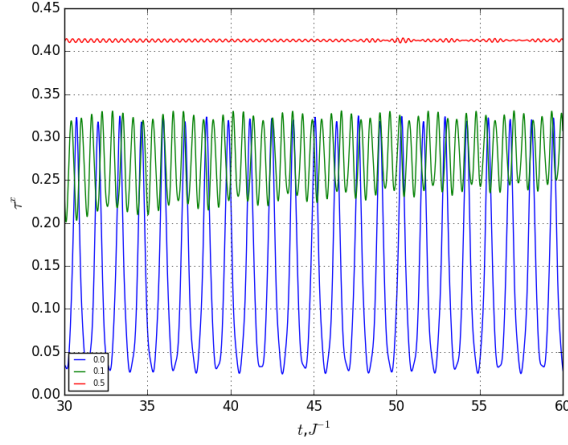


Рис. 5.4: Временная эволюция индивидуальной степени свободы τ_k^x в режиме слабо затухающих колебаний для нескольких значений g – констант связывания с окружением. Размер системы: 100×100 , $U_i = 0.8$, $U_f = 12$, $\Lambda = 20$, $dT = 0.01$.

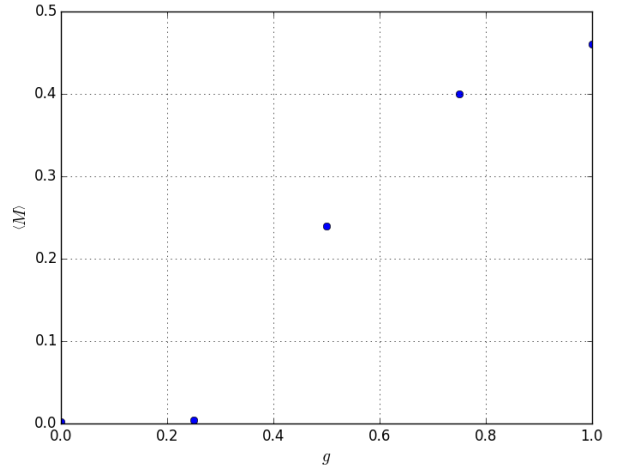
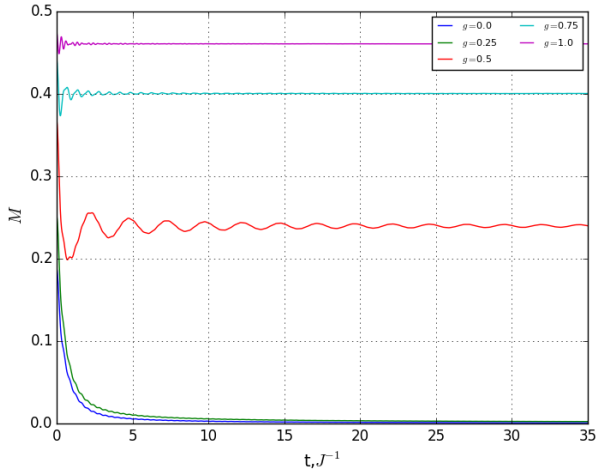


Рис. 5.5: Слева – временная зависимость антиферромагнитного параметра порядка в случае сильного затухания для разных значений связываний с бозонным окружением. Справа – зависимость среднего по времени (начиная с большого по сравнению со всеми характерными временами системы) параметра порядка от связывания с окружением.

Качественно эффект может быть объяснен с помощью введения двух конкурирующих времен $\tau_\Delta \propto 1/\Delta$ и $\tau_g \propto 1/g^2$. В случае, если g мало, к моменту, когда диссипация начинает играть существенную роль, M уже близко к нулю, и, поскольку в нашей системе (??) окружение связано с M , ее влияние получается пренебрежимо малым.

Тот факт, что в этом режиме бозонное окружение почти не влияет на динамику, может быть исследован разложением решения уравнений движений по g и по U_f . Предполагая, что решение уравнения (5.1) аналитично в g и U , вплоть до члена $O(g^2U)$ будем иметь:

$$\bar{\gamma}_k(t) = \bar{\alpha}_k(t) + U_f \bar{\beta}_k(t) + g^2 \bar{\gamma}_k(t) + O(g^2U) \quad (5.12)$$

Можно показать, что решение γ_k^x с ненулевой ϵ_k выглядит как:

$$\gamma_k^x(t) = \gamma_k(0) \cos(\epsilon_k t) + \frac{\alpha_k^z \pi}{\epsilon_k} \int_0^t d\tau \sin(\epsilon_k(t - \tau)) F(\tau) \quad (5.13)$$

где $F(t) = \frac{1}{2} \frac{\Lambda M(0)}{1 + \Lambda^2 t^2} + \int_0^t d\tau \frac{\Lambda^3 M(\tau)(t - \tau)}{(1 + \Lambda^2 \tau^2)^2}$ и $\gamma_k^x(t) = \gamma_k^x(0)$ для такого k что $\epsilon_k = 0$, $M(t) = \sum \alpha_k^x(t)$. Однако, интегрируя γ_k^x по области $0 < k_i < \pi$ можно найти, что $\int d^2 k \frac{\alpha_k^z \pi}{\epsilon_k} \int_0^t d\tau \sin(\epsilon_k(t - \tau)) F(\tau) = 0$.

Таким образом, лидирующие члены разложения по g^2 и U обнулятся: динамическая "память" зависит от силы взаимодействия в системе. Заметим, что мы не предполагали никакой определенной формы $M(t)$. Поэтому этот вывод корректен для любого $U_f \ll 1$, $U_i \gg U_f$ и $g \ll 1$.

5.6 Итоги

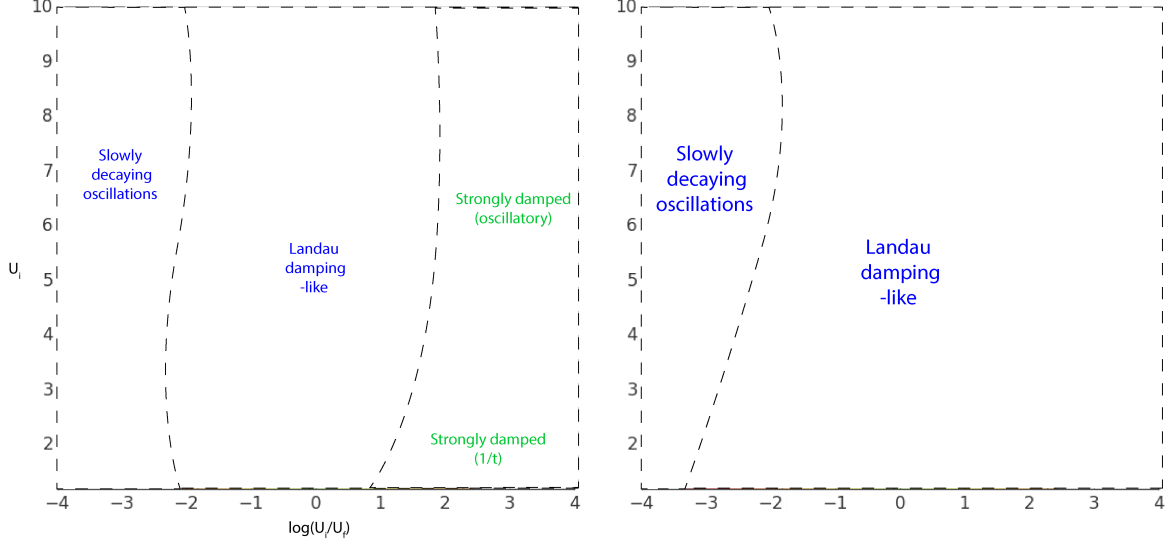


Рис. 5.6: Приблизительная фазовая диаграмма для динамических режимов открытой системы для $g = 0.25$ (слева) и $g = 0.75$. В обоих случаях динамика везде ведет систему к некоторому стационарному состоянию. Во случае $g = 0.75$, однако, режима с быстрым затуханием больше нет.

Мы показали, что в случае наличия окружения, режим с постоянными осцилляциями параметра порядка исчезает.

Однако, оказалось, что из-за особенностей связывания с бозонами, система не всегда релаксирует в состояния с макрохарактеристиками, соответствующими основному. А именно, для малой связи с резервуаром $g < 0.3$ режим с быстрым затуханием параметра порядка не претерпевает существенных изменений.

При $g \approx 0.3$, однако, происходит фазовый переход в режим, качественно не отличимый от режима для слабого возмущения.

В остальных двух режимах система релаксирует в состояние с тем же M , что и основное, или близкое к нему. То есть, динамика на макроуровне определяется резервуаром в обоих режимах.

На микроуровне, однако, это не совсем так. Хотя утверждение, сделанное в секции про стационарный случай, остается верным, динамика индивидуальных степеней свободы открытой системы в режиме слабого затухания до очень больших времен $t \gg 1/\Delta$ (из-за медленности достижения равновесия) определяется окружением. В режиме затухания Ландау, напротив, еще до достижения стационарного $M_e q$ микроэволюция в пределе больших времен полностью определяется электронной системой. Было установлено ((5.11)), что вид (Рис. 5.2) эволюции тот же, что и у замкнутой системой с ренормализованной константой взаимодействия. Таким образом, полной релаксации в этом режиме не происходит: на микроуровне движение остается всегда, даже в пределе бесконечного времени.

Это не так в режиме со слабым затуханием: в нем качественно меняется как эволюция коллективной (Рис. 5.3), так и индивидуальных мод (Рис. 5.4): по крайней мере в пределе большого g происходит полная релаксация системы.

Глава 6

Заключение

Для замкнутой системы в работе было показано, что динамика антиферромагнитно упорядоченного слоя имеет те же режимы, что и БКШ-конденсат: режимы с постоянными осцилляциями параметра порядка, затуханием Ландау и сильным затуханием.

Оказалось, однако, что из-за наличия дополнительной характеристической частоты J , динамика параметра порядка в последнем режиме имеет количественно различный вид в зависимости от того, насколько велик начальный параметр взаимодействия U_i по сравнению с J : при малом U_i осцилляции с частотой $8J$ пренебрежимо малы. При $U_i \gg J$ – наоборот, существенны.

Кроме того, затухание имеет степенной характер $\propto \frac{1}{t}$, а не экспоненциальный.

В ходе изучения динамики открытой системы было отмечено, что в этом режиме система не всегда релаксирует в состояние с M , соответствующем основному. Из-за конкуренции характерных времен термостата и электронной подсистемы может сложиться ситуация $g < 0.3$, в которой взаимодействие с окружением $\propto g^2 M$ зануляется быстрее, чем происходит диссипация энергии.

В остальных двух режимах система приходит к состоянию со значением M равным или близким к равновесному.

В режиме со слабым затуханием (режим постоянных осцилляций в замкнутой системе) это, однако, происходит иначе, чем в режиме с затуханием Ландау.

Так, динамика открытой системы в режиме затухания Ландау на микроуровне в пределе больших времен определяется электронной системой и полной релаксации в этом режиме не происходит: на микроуровне движение остается.

Это не так в режиме со слабым затуханием, где по крайней мере при больших g релаксация происходит и на микроуровне.

На макроуровне, однако, за счет того, что окружение оказывает воздействие на малых временах и меняет распределение индивидуальных степеней свободы τ_k^x , эволюция существенно отлична от эволюции замкнутой системы. С увеличением g осцилляции у среднего по периоду значения затухают быстрее: $M(t) - \langle M \rangle \propto 1/t^r$, где r становится больше единицы в пределах вычисленной фазовой диаграмма при $g = 0.75$.

Таким образом, ответы на вопросы, заданные в начале работы, выглядят так:

1. Мы можем наблюдать динамические режимы в замкнутой системе подобные тем, что есть в БКШ-конденсате.
2. Открытая система в рамках используемого приближения не всегда релаксирует в основное состояние. А именно, это зависит от режима динамики.
3. После релаксации параметра к некоторому постоянному значению динамика индивидуальных степеней свободы определяется электронной подсистемой. Эволюция же макростепени свободы существенно зависит от окружения во всех режимах за исключением режима с сильным затуханием.

Литература

- [1] Lev Davidovich Landau. On the vibrations of the electronic plasma. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 10:25, 1946.
- [2] LP Gor'kov and GM Eliashberg. Generalization of the ginzburg-landau equations for non-stationary problems in the case of alloys with paramagnetic impurities. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 27:328, 1968.
- [3] Emil A Yuzbashyan, Boris L Altshuler, Vadim B Kuznetsov, and Victor Z Enolskii. Solution for the dynamics of the bcs and central spin problems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(36):7831, 2005.
- [4] Emil A. Yuzbashyan, Oleksandr Tsyplyatyev, and Boris L. Altshuler. Relaxation and persistent oscillations of the order parameter in fermionic condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 96:097005, Mar 2006.
- [5] Emil A. Yuzbashyan, Boris L. Altshuler, Vadim B. Kuznetsov, and Victor Z. Enolskii. Nonequilibrium cooper pairing in the nonadiabatic regime. *Phys. Rev. B*, 72:220503, Dec 2005.
- [6] Emil A Yuzbashyan, Boris L Altshuler, Vadim B Kuznetsov, and Victor Z Enolskii. Nonequilibrium cooper pairing in the nonadiabatic regime. *Physical Review B*, 72(22):220503, 2005.
- [7] Emil A Yuzbashyan, Boris L Altshuler, Vadim B Kuznetsov, and Victor Z Enolskii. Solution for the dynamics of the bcs and central spin problems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(36):7831, 2005.
- [8] R. A. Barankov and L. S. Levitov. Synchronization in the bcs pairing dynamics as a critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, 96:230403, Jun 2006.
- [9] RA Barankov, LS Levitov, and BZ Spivak. Collective rabi oscillations and solitons in a time-dependent bcs pairing problem. *Physical review letters*, 93(16):160401, 2004.
- [10] Naoto Tsuji, Martin Eckstein, and Philipp Werner. Nonthermal antiferromagnetic order and nonequilibrium criticality in the hubbard model. *Phys. Rev. Lett.*, 110:136404, Mar 2013.
- [11] Matteo Sandri and Michele Fabrizio. Nonequilibrium dynamics in the antiferromagnetic hubbard model. *Phys. Rev. B*, 88:165113, Oct 2013.

- [12] Arkadii Beinusovich Migdal. *Qualitative methods in quantum theory*. Da Capo Press, 2000.
- [13] Emil A Yuzbashyan and Maxim Dzero. Dynamical vanishing of the order parameter in a fermionic condensate. *Physical review letters*, 96(23):230404, 2006.