Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
КАФЕДРА ПРОБЛЕМ ФИЗИКИ И АСТРОФИЗИКИ

Вильковиский Илья Сергеевич

Алгебраические методы в двумерных полевых моделях

Выпускная квалификационная работа бакалавра
Направление подготовки 010900 «Прикладные математика и физика»

Зав.кафедрой	____________	А.В.Гуревич
Руководитель	____________	М.А.Григорьев
Обучающийся	____________	И.С.Вильковиский

2016

Содержание

1 Введение

Данная работа посвящена изучению квантовых интегрируемых полевых моделей. Основным примером такой модели для нас будет модель $Sine - Gordon$, формально она задается действием

$$S = \int dxdt[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{m^2}{\beta^2}(\cos(\beta\phi) - 1)] \tag{1}$$

Мы будем считать $\beta^2 < 8\pi$ когда теорию SG можно рассматривать как возмущение конформной теории одного скалярного бозона

$$S_{cft} = \int dxdt\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \tag{2}$$

оператором $\frac{m^2}{\beta^2}(\cos(\beta\phi))$, член $-\frac{m^2}{\beta^2}$ есть просто константа, которую удобно добавлять в действие (1).
В свободной конформной теории (2) кореллятор двух операторов равен:

$$< \cos(\beta\phi(x))\cos(\beta\phi(y)) >_{CFT} = |x - y|^{\frac{\beta^2}{2\pi}} \tag{3}$$

Это значит что размерность оператора $\cos(\beta\phi)$ равна $\frac{\beta^2}{4\pi}$ так что при $\beta^2 < 8\pi$ размерность оператора меньше 2 так что размерность константы m^2 отрицательна и в ультрафиолетовом пределе теория все лучше описывается свободной теорией (2) , это становится не верным если $\beta^2 > 8\pi$, при $\beta^2 = 8\pi$ происходит фазовый переход, везде далее мы будем ограничиваться сетором $\beta^2 < 8\pi$.

Теория SG обладает рядом свойств, делающих её изучение более простым, а именно:
1) Известны классические решения модели в виде уединенных волн (солитоны)

$$\phi = \pm\frac{4}{\beta}\arctan(e^{m\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}}) \tag{4}$$

Знаки $(+,-)$ соответсвуют солитону и антисолитону соответственно. Так же известны решения соответствующие любому количеству солитонов. [3]
2) Известно что данная модель обладает бесконечным количеством интегралов движения, к сожалению для них не имеется общей формулы, однако в принципе их можно вычислять один за другим согласно рекуррентным формулам [1].

Это свойство сохраняется и на квантовом уровне [5].
3) Как следствие бесконечного числа законов сохранения не возможно рождение и уничтожение частиц в процессах рассеяния, и более того матрица рассеяния факторизуется:

$$S(p_1,p_2,p_3 \to k_1,k_2,k_3) = S(p_1,p_2 \to q_1,q_2)S(q_1,p_3 \to k_1,q_3)S(q_2,q_3 \to k_2,k_3) \tag{5}$$

Здесь $S(p_1,p_2,p_3 \to k_1,k_2,k_3)$-матрица рассеяния трех частиц, $S(p_i,p_j \to q_k,q_l)$-двухчастичные матрицы рассеяния. Здесь многие детали опущенны до следующей секции, где будет подробно рассмотрена матрица рассеяния.
Однако несмотря на все эти упрощения, вычисление физически интересных объектов (например корелляционных функций) по прежнему остается трудной задачей. К сожалению наличие интегрируемости ни как не упрощет использование стандартного в КТП метода - диаграмной техники,поэтому представляется интересным исследование других подходов, явно использующих интегрируемость.

Отметим также что изучение данной модели интересно и с практической стороны, с одной стороны она описывает физику перехода Березинского-Костерлица-Таулеса, с другой стороны через бозонизацию так называемую Латтинджеровскую жидкость одномерных электронов [15], так же модель СГ тесно связанна с интегрируемыми деформациями минимальных моделей [4].

2 S матрица и непертрубативный подход в интергрируемых моделях

Основы описанного ниже метода были заложены в пионерских работах [2],[6],[7],[8].
Начнем с того что в этих работах было показанно: основными частицами в теории SG удобнее считать солитоны Z^+ и антисолитоны Z^-, классически это специальные решения уравнений движения (4).
Матрица рассеяния

$$S(p_1,p_2 \to k_1,k_2)^{\epsilon_{p1},\epsilon_{p2}}_{\epsilon_{k1},\epsilon_{k2}} = S(s)^{\epsilon_{p1},\epsilon_{p2}}_{\epsilon_{k1},\epsilon_{k2}} \tag{6}$$

Есть аналитческая функция переменной s на всей комплексной плоскости, за исключением разрезов вдоль вещественной оси $(-\infty,0)\cup(4M^2,\infty)$, здесь $s =$

$(p_1^\mu + p_2^\mu)^2$, $\epsilon = \pm$. Матричная структура отвечает за рассеяниие солитона на солитоне S^{++}_{++}, за амплитуду прохождения S^{+-}_{+-} и отражения S^{-+}_{+-} солитон-антисолитонного рассеяния и т.д

Удобно перейти к быстротам вместо энергии и импульса $E_i = M\cosh(\theta_i)$,

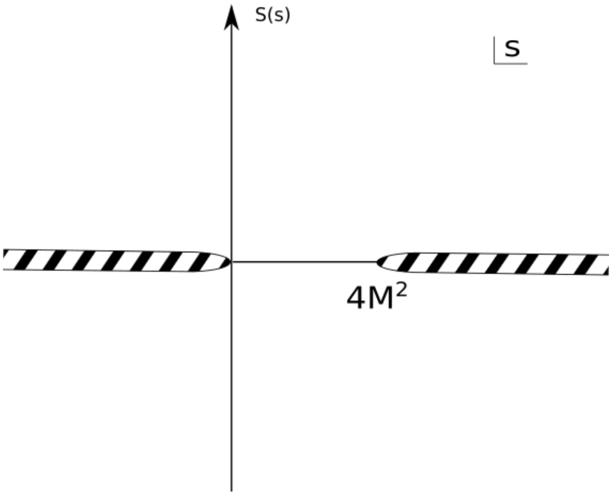

Рис. 1: Положение разрезов матрицы рассеяния

$p_i = M\sinh(\theta_i)$,$\theta = \theta_2 - \theta_1$ тогда $s^2 = 2M\cosh(\theta) = M(e^\theta + e^{-\theta})$ это композиция экспоненциального преобразования и преобразования Жуковского. При этом комплексная плоскость с разрезами отобразится в полосу $(Im\ \theta \in [0, \pi])$, которую мы будем называть физической областью.

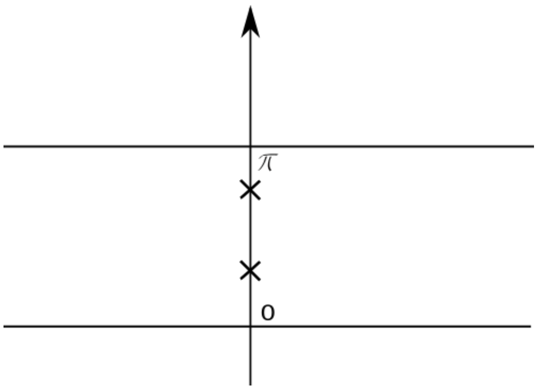

Рис. 2: Матрица рассеяния в θ плоскости, крестами обозначенны возможные полюса матрицы рассеяния отвечающие связным состояниям

Во введении было заявлено что многочастичная матрица рассеяния факторизуется, это означает что

$$S(p_1, p_2, p_3 \to k_1, k_2, k_3)^{\epsilon_{p1},\epsilon_{p2},\epsilon_{p3}}_{\epsilon_{k1},\epsilon_{k2},\epsilon_{k3}} =$$
$$= S(p_1, p_2 \to q_1, q_2))^{\epsilon_{p1},\epsilon_{p2}}_{\epsilon_{q1},\epsilon_{q2}} S(q_1, p_3 \to k_1, q_3)^{\epsilon_{q1},\epsilon_{p3}}_{\epsilon_{k1},\epsilon_{q3}} S(q_2, q_3 \to k_2, k_3)^{\epsilon_{q2},\epsilon_{q3}}_{\epsilon_{k2},\epsilon_{k3}} \quad (7)$$

По повторяющимся индексам ведется суммирование.

Однако, трехчастичную матрицу рассеяния можно представить еще и в другом виде:

$$S(p_1,p_2,p_3\to k_1,k_2,k_3)^{\epsilon_{p1},\epsilon_{p2},\epsilon_{p3}}_{\epsilon_{k1},\epsilon_{k2},\epsilon_{k3}}= \\ =S(p_2,p_3\to q_2,q_3)^{\epsilon_{p2},\epsilon_{p3}}_{\epsilon_{q2},\epsilon_{q3}}S(q_1,p_3\to k_1,q_3)^{\epsilon_{q1},\epsilon_{p3}}_{\epsilon_{k1},\epsilon_{q3}}S(q_1,q_2\to k_1,k_2)^{\epsilon_{q1},\epsilon_{q2}}_{\epsilon_{k1},\epsilon_{k2}} \quad (8)$$

Совпадение правых частей уравнений (7, 8) называется уравнением Янга-Бакстера, оно будет играть ключевую роль в дальнейших построениях.
Исходя из уравнения Янга-Бакстера, требования унитарности и кроссинг симметрии матрицы рассеяния А.Замолодчиковым была найдена точная S матрица [7]. Вообще говоря, три вышеперечисленных условия фиксируют S матрицу только с точностью до так называемой КДД неоднозначности (соответствующей умножению на некоторую скалярную функцию), но мы не будем останавливаться на этом вопросе.

$$\hat{S}=S(\theta,\gamma)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{\sinh(\frac{\theta}{\gamma})}{\sinh(\frac{i\pi-\theta}{\gamma})}&\frac{\sinh(\frac{i\pi}{\gamma})}{\sinh(\frac{i\pi-\theta}{\gamma})}&0\\0&\frac{\sinh(\frac{i\pi}{\gamma})}{\sinh(\frac{i\pi-\theta}{\gamma})}&\frac{\sinh(\frac{\theta}{\gamma})}{\sinh(\frac{i\pi-\theta}{\gamma})}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad (9)$$

Где

$$S(\theta)=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(1+\frac{i\theta}{\pi\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{i\theta}{\pi\gamma}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{R_n(\theta)R_n(i\pi-\theta)}{R_n(0)R_n(i\pi)} \quad (10)$$

Функции $R_n(\theta)$

$$R_n(\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac{2n}{\gamma}+\frac{i\theta}{\pi\gamma}\right)\Gamma\left(1+\frac{2n}{\gamma}+\frac{i\theta}{\pi\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{\gamma}+\frac{i\theta}{\pi\gamma}\right)\Gamma\left(1+\frac{2n-1}{\gamma}+\frac{i\theta}{\pi\gamma}\right)} \quad (11)$$

$\gamma=\frac{\beta^2}{8\pi-\beta^2}$ - перенормированная константа связи. Из уравнения (10) можно увидеть что амплитуда солитон-антисолитонного рассеяния имеет полюса в физической области (нули $\sin(\frac{i\pi-\theta}{\gamma})$) при $\theta=i\pi-in\pi\gamma$, $n<[\frac{1}{\gamma}]$ (см рис 2) эти полюса объясняются наличием связных состояний-бризеров с массами

$$m_n=2M\sin\left(\frac{\pi n\gamma}{2}\right) \quad (12)$$

Здесь M- масса солитона. Легчайший из бризеров m_1 асссоциируется с фундаментальной частицей теории SG, например в пределе малой константы связи масса солитона может быть полученна вычислением классической энергии решения (4) $M = \frac{8m}{\beta^2} + O_{\beta^2}(1)$, и $m_1 = m + o(\beta^2)$. Так же за счет общего множителя S матрица обладает набором не физических полюсов, не соответствующих связным состояниям при $\theta = i\pi\gamma n$, $n \geq 2$.
Имея в руках точную S матрицу определим гильбертово пространство теории, как пространство порожденнное векторами

$$Z^{\dagger}_{\epsilon_n}(\theta_n)...Z^{\dagger}_{\epsilon_1}(\theta_1)|0>=|\theta_n,...\theta_1>_{\epsilon_n,...\epsilon_1} \tag{13}$$

И двойственное к нему, порожденное векторами

$$<0|Z^{\epsilon_1}(\theta_1)...Z^{\epsilon_n}(\theta_n) =^{\epsilon_1,...\epsilon_n}<\theta_1,...\theta_n| \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Теперь опредлим $|in>$ и $|out>$ состояния.

$$|in>=|\theta_n,...\theta_1>_{\epsilon_n,...\epsilon_1} \quad ,\theta_1<\theta_2...<\theta_n \tag{16}$$

$$|out>=|\theta_1,...\theta_n>_{\epsilon_1,...\epsilon_n} \quad ,\theta_1<\theta_2...<\theta_n \tag{17}$$

По определению in и out состояний мы должны потребовать

$$|\theta_1,\theta_2>_{\epsilon_1,\epsilon_2}= S(\theta_2-\theta_1)^{\tilde{\epsilon}_1,\tilde{\epsilon}_2}_{\epsilon_1,\epsilon_2}|\theta_1,\theta_2>_{\tilde{\epsilon}_2,\tilde{\epsilon}_1} \tag{18}$$

Это определяет следующие коммутационные соотношения опреаторов Z.

$$Z^{\epsilon_1}(\theta_1)Z^{\epsilon_2}(\theta_2) = S(\theta_1-\theta_2)^{\epsilon_1,\epsilon_2}_{\tilde{\epsilon}_1,\tilde{\epsilon}_2}Z^{\tilde{\epsilon}_2}(\theta_2)Z^{\epsilon_1}(\theta_1) \tag{19}$$

$$Z^{\dagger}_{\epsilon_1}(\theta_1)Z^{\dagger}_{\epsilon_2}(\theta_2) = Z^{\dagger}_{\tilde{\epsilon}_2}(\theta_2)Z^{\dagger}_{\tilde{\epsilon}_1}(\theta_1)S(\theta_1-\theta_2)^{\tilde{\epsilon}_1,\tilde{\epsilon}_2}_{\epsilon_1,\epsilon_2} \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

Эти соотношения должны быть дополнены перестановочными свойствами операторов $Z^{\epsilon}(\theta_1)Z^{\dagger}_{\epsilon_2}(\theta_2)$ которые определяются скалярным произведением векторов

$|\theta_n, ...\theta_1>_{\epsilon_n,...\epsilon_1}$ и ${}^{\epsilon_1,...\epsilon_n}<\theta_1, ...\theta_n|$, по определению положим:

$$
{}^{\epsilon_{j_1},...\epsilon_{j_n}}<\theta_{j_1},...\theta_{j_n}||\theta_{i_n},...\theta_{i_1}>_{\epsilon_{i_n},...\epsilon_{i_1}}=\prod_{k=1}^{n}\delta(\theta_{j_k}-\theta_{i_k})\delta_{\epsilon_{i_k}}^{\epsilon_{j_k}}, \quad i_1<i_2<...i_n, j_1<j_2<...j_n \tag{22}
$$

Остальные скалярные произведения должны быть найдены с использованием перестановочных свойств $(19, 20)$

Рассмотрим подробнее скалярное произведение двухчастичных состояний

$$
\begin{aligned}
{}^{\epsilon_3,\epsilon_4}<\theta_3,\theta_4||\theta_2,\theta_1>_{\epsilon_2,\epsilon_1}= \delta(\theta_1-\theta_3)\delta(\theta_2-\theta_4)\delta_{\epsilon_1}^{\epsilon_3}\delta_{\epsilon_2}^{\epsilon_4}+ \\
+S(\theta_2-\theta_1)_{\epsilon_1,\epsilon_2}^{\epsilon_1,\epsilon_2}\delta(\theta_2-\theta_3)\delta(\theta_1-\theta_4)\delta_{\tilde{\epsilon_2}}^{\epsilon_3}\delta_{\tilde{\epsilon_1}}^{\epsilon_4}
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
Z^{\epsilon_1}(\theta_1)Z_{\epsilon_2}^{\dagger}(\theta_2)=Z_{\tilde{\epsilon}_2}^{\dagger}(\theta_2)S(\theta_2-\theta_1)_{\epsilon_2,\tilde{\epsilon}_1}^{\tilde{\epsilon}_2,\epsilon_1}Z^{\tilde{\epsilon}_1}(\theta_1)+\delta_{\epsilon_2}^{\epsilon_1}\delta(\theta_1-\theta_2) \tag{24}
$$

Так определенная алгебра называется алгеброй Замолодчикова-Фаддеева. Наконец, чтобы до конца определить теорию, нужно задать матричные элементы локальных операторов- форм-факторы.

$$
F_O(\theta_1,...\theta_n)_{\epsilon_1,...\epsilon_n}=<0|O(0)|\theta_n,...\theta_1>_{\epsilon_n,...\epsilon_1} \tag{25}
$$

Смиронвым были сформулированны аксиомы которым должны удовлетворять форм-факторы, а так-же были найдены форм-факторы некоторых локальных операторов [11]. Однако процедура предложенная Смирновым очень сложна, было бы здорово найти представление алгебры Замолодчикова-Фаддеева, после чего вычислять форм-факторы явно, считая скалярные произведения.

3 S матрица, уравнение Янга-Бакстера и квантовые группы

Для дальнейшего нам понадобится ввести новый объект-квантовую афинную алгебру $U_q(\hat{S}l(2)_k)$, квантовые алгебры были впервые введены Дринфельдом [14], формально это алгебра с генераторами e_i, f_i, K_i , $i=0,1$ определяющаяся следующими соотношениями.

$$t_i t_j = t_j t_i \tag{26}$$

$$t_0 t_1 = q^k t_i e_j = q^{A_{ij}} e_j t_i, \qquad t_i f_i = q^{-A_{ij}} f_j t_i \tag{27}$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{i,j} \frac{(t_i - t_i^{-1})}{(q - q^{-1})} \tag{28}$$

$$e_i^3 e_j - (q + 1 + q^{-1})(e_i^2 e_j e_i - e_i e_j e_i^2) - e_j e_i^3 = 0 \tag{29}$$

$$f_i^3 f_j - (q + 1 + q^{-1})(f_i^2 f_j f_i - f_i f_j f_i^2) - f_j f_i^3 = 0 \tag{30}$$

Здесь A_{ij}-матрица картана афинной алгебры $\hat{S}l(2)$, $A_{00} = A_{11} = -A_{10} = -A_{01} = 2$.
Символы с индексом $i = 1$ образуют подалгебру-квантовую деформацию универсальной обертывающей обычной $Sl(2)$, положив $t_1 = q^{h_1}$, $q = e^{\hbar}$, $\hbar \to 0$ и собрав члены при $\hbar^1$ получим соотновения алгебры $Sl(2)$

$$[e_1, f_1] = h_1 + o(\hbar) \tag{31}$$

$$[h_1, e] = 2e + o(\hbar) \qquad [h_1, f] = -2f + o(\hbar) \tag{32}$$

Наличие символов с индексом 0 отвечает афинной деформации, делающей из конечномерной алгебры $Sl(2)$ бесконечномерную $S\hat{l(2)}$, подробнее про афинные алгебры и их теорию представлений см аппендикс.
Главным для нас будет наличие у этой алгебры копроизведения

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i \ \ , \ \Delta(f_i) = f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i \ \ , \ \ \Delta(t_i) = t_i \otimes t_i \tag{33}$$

Удовлетворяющее условию $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$, это означает что имея два представления алгебры V_1 и V_2 можно с помощью копроизведения определить действи и на их тензорном произведении $(V_1 \otimes V_2)$ по правилу.

$$x(V_1 \otimes V_2) = \Delta(x)(V_1 \otimes V_2) \tag{34}$$

Мы будем рассматривать два основных представления нашей алгебры :
представления старшего веса (подробнее см аппендикс) и evaluation представления, последние имеют простую структуру и определяются как векторное про-

странство $V(\xi) = Span\{V_{\pm} \otimes \mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}]\}$

$$t_0^{-1} = t_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi, \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi^{-1} \tag{36}$$

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi, \qquad f_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi^{-1} \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

Наконец, мы имеем все ингридиенты чтобы понять связь S матрицы с квантовыми группами, из определения копроизведения (33) видно что оно не симметрично по первой и второй компоненте в тензоном произведение, а это значит существует и другое копроизведение $\bar{\Delta} = P \circ \Delta \circ P$, Где P - перестановка $PV_{\xi_1} \otimes V_{\xi_2} = V_{\xi_2} \otimes V_{\xi_1}$.
Получается на тензорном произведении двух предсавлений можно задать два разных представления алгебры , пользуясь копроизведениями Δ, и $\bar{\Delta}$, существует ли между ними изоморфизм? Ответ на этот вопрос утвердительный, изоморфизм существует и дается линейным оператором: $\bar{\Delta}(x) = R\Delta(x)R^{-1}$. Более строго:
Для квантовой группы $\tilde{R}$ матрица определяется как оператор сплетающий два *evaluation* представления и коммутирующий с действием группы, т.е

$$\tilde{R} = PR(\xi_1, \xi_2) : V_{\xi_1} \otimes V_{\xi_2} \to V_{\xi_2} \otimes V_{\xi_1} \tag{39}$$

$$\Delta(x) \circ PR = PR \circ \Delta(x) \tag{40}$$

Здесь для удобства в определение R матрицы вставлен оператор перестановки. Оказывается что $R(\xi_1, \xi_2) = R(\frac{\xi_1}{\xi_2})$ и в базисе $\{+,+\}, \{+,-\}, \{-,+\}, \{-,-\}$

$$R(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\xi^2)q}{1-q^2\xi^2} & \frac{(1-q^2)\xi}{1-q^2\xi^2} & 0 \\ 0 & \frac{(1-q^2)\xi}{1-q^2\xi^2} & \frac{(1-\xi^2)q}{1-q^2\xi^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Так определенная R матрица удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \tag{42}$$

при действии на $V_{\xi_1} \otimes V_{\xi_2} \otimes V_{\xi_3}$

Ключевое наблюдение Джимбо и Мивы [12] заключается в том что после замены

$$\xi = e^{\frac{\theta}{\gamma}}, \quad q = -e^{\frac{i\pi}{\gamma}} \tag{43}$$

Данная R матрица, с точностью до общего множителя переходит в S матрицу теории SG.

$$\hat{S} = S(\theta,\gamma)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(\frac{\theta}{\gamma})}{\sinh(\frac{i\pi-\theta}{\gamma})} & \frac{\sinh(\frac{i\pi}{\gamma})}{\sinh(\frac{i\pi-\theta}{\gamma})} & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(\frac{i\pi}{\gamma})}{\sinh(\frac{i\pi-\theta}{\gamma})} & \frac{\sinh(\frac{\theta}{\gamma})}{\sinh(\frac{i\pi-\theta}{\gamma})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Где γ- константа связи теории SG.

Стоит отметить что разным значениям γ могут отвечать одинаковые q .

Осознав связь матрицы рассеяния с квантовой группой можно построить представление алгебры Замолодчикова, это подробно описанно в аппендиксе. К сожалению это еще не конец истории, как упоминалось выше R матрица построенная по квантовой группе и S матрица теории SG совпадают лишь с точностью до общего множителя, нужна дополнительная модификация, это было сделано Лукьяновым [16], [17].

4 Представление форм-факторов теории SG свободными полями

Здесь мы без особых объяснений опишем конструкцию Лукьянова.

Построим операторы Z_- т.ч

$$Z_-(\theta_1)Z_-(\theta_2) = S(\theta_1-\theta_2)Z_-(\theta_2)Z_-(\theta_1) \tag{45}$$

Для удобства мы пользуемся обозначением $z = q^{\frac{2i\theta}{\pi}}$

$$Z_-(\theta) = e^{-\frac{\theta}{2\gamma}} : e^{\phi(\theta)} : \tag{46}$$

$$\phi(\theta) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}(Q + P\log(z)) + \sum_{m\neq 0} \frac{a_m}{[2m]} z^{-m} \tag{47}$$

И оператор

$$X^{-}(\theta) =: Z_{-}(\theta - \frac{i\pi}{2}) Z_{-}(\theta + \frac{i\pi}{2}) : \tag{48}$$

$$X^{-} = e^{-\tilde{\phi}(\theta)} \tag{49}$$

$$\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma}}(Q + P\log(z)) + \sum_{m\neq 0} \frac{a_m}{[m]} z^{-m} \tag{50}$$

Где операторы имеют следующие коммутационные соотношения

$$[a_m, a_n] = -\delta_{m+n,0} \frac{[m][2m][(\gamma+1)m]}{m[\gamma m]},\ [P, Q] = 1 \tag{51}$$

Мы пользуемся обозначением $[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-}1}$. Для так определенных операторов коммутационные соотношения имеют следующий вид:

$$Z_{-}(z) Z_{-}(w) = \frac{g(z)}{g(z^{-1})} Z_{-}(w) Z_{-}(z) \tag{52}$$

Где

$$g(z) = \frac{(z; q^{2\gamma}, q^4)(zq^{2\gamma+4}; q^{2\gamma}, q^4)}{(zq^2; q^{2\gamma}, q^4)(zq^{2\gamma+2}; q^{2\gamma}, q^4)} \tag{53}$$

Чтобы получить формулу (10) нужно сделать предельный переход $q \to 1$, $z = q^{\frac{2i\beta}{\pi}}$, θ - фиксорованно. Оператор Z^{+} определяется как

$$Z_{+} = \oint \frac{dw}{2\pi w} e^{\frac{\theta-\alpha}{\gamma}} (e^{\frac{i\pi(\gamma+1)}{2\gamma}} X^{-}(w) Z_{-}(z) - e^{-\frac{i\pi(\gamma+1)}{2\gamma}} Z_{-}(z) X^{-}(w)) \tag{54}$$

Здесь $w = q^{\frac{2i\alpha}{\pi}}$, $z = q^{\frac{2i\theta}{\pi}}$

Следующий шаг, это понять как на языке свободных полей вычисляются форм-факторы. Во первых необходимо построить отображение из пространства локальных операторов теории SG в операторы дейтвующие в пространстве Фока свободных бозонов, в общем случае такое отображение не найдено, но существует гипотеза [17] что форм-фактор экспоненциального оператора $V_a = e^{ia\phi}$ задается следующей формулой:

$$< 0|V_a(0)|\theta_n...\theta_1 >_{\epsilon_n...\epsilon_1} = \lim_{q\to 1} \mathbb{G}_{a,n} tr[q^{-4K} e^{\frac{2\pi P a}{\beta}} Z_{\epsilon_n}(\theta_n)...Z_{\epsilon_1}(\theta_1)] \tag{55}$$

Где $G_{a,n}$-нормировка, значение которой должно быть найдено из других соображений. K - оператор буста.

$$e^{-\alpha K} Z_\epsilon(\theta) e^{\alpha K} = e^{-\frac{\theta}{2\gamma}} Z_\epsilon(\theta+\alpha) \tag{56}$$

$$K = \frac{P^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2[\gamma m]}{[(\gamma+1)m][m][2m]} a_{-m} a_m + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}} - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right) P \tag{57}$$

В случае свободных фермионов $\beta^2 = 4\pi$

$$Z_-(\theta) = e^{-\frac{\theta}{2\gamma}} : e^{\phi(\theta)} : \tag{58}$$

$$Z_+(\theta) = e^{+\frac{\theta}{2\gamma}} (: e^{-\phi(\theta+i\pi)} : + : e^{-\phi(\theta-i\pi)} : \tag{59}$$

$$\lim_{q\to 1} tr[q^{-4K} : e^{\phi(\theta_1)} :: e^{\phi(\theta_2)} :] = i \sinh\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) \tag{60}$$

Так что

$$< 0|e^{ia\phi} Z_+^\dagger(\theta_{2n})...Z_+^\dagger(\theta_{n+1}) Z_-^\dagger(\theta_n)...Z_-^\dagger(\theta_1)|0 >= \mathbb{G}_a (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(i \sin\left(\frac{\pi a}{\sqrt{4\pi}}\right)\right)^n \tag{61}$$
$$e^{\frac{a}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=1}^{k=n} (\theta_{n+k}-\theta_k)} \frac{\prod_{1\le k<j\le n} \sinh[\frac{\theta_k-\theta_j}{2}] \sinh[\frac{\theta_{n+k}-\theta_{n+j}}{2}]}{\prod_{1\le k,j\le n} \cosh[\frac{\theta_{n+k}-\theta_j}{2}]}$$

Интересно отметить что формула состоит из двух компонент, простой зависимости от a и универсального произведения тригонометрических функций.

5 Заключение.

В данной работе был изучен непертрубативный подход в двумерных интегрируемых моделях, продемонстрировано вычисление формфакторов экспоненциального поля, этот аппарат открывает путь к дальнейшему изучению модели.
Описанная в работе конструкция известна довольно давно, но не смотря на это многие проблемы до сих пор не имеют решения, основные из них:
Нахождение соответсвия между локальными операторами и форм-факторами.
Определенные успехи в этом недавно были достигнуты Черноголовской группой [18]-[20], другим открытым вопросом является вычисление корреляционных функций, или удобный метод для анализа их ассимптотик.
Также до сих пор, мало внимания было уделенно поиску физических следствий

данных результатов. В дальнейшем автор надеется улучшить свое понимание, изучив отдельные частные случае в которых можно ожидать существенных упрощений: рассмотреть теорию при значении константы связи $\gamma = \frac{1}{N}$ при которых рассеяние становится безотражательным, а также рассмотреть нерелятивисткий предел теории.

Очень интересным представляется изучение расширений теории SG , допускающих наличие границы и сохраняющих интегрируемость [21].

6 Аппендикс : теория представлений $U_q(Sl(\hat{2})_1)$

Начнем с классической (q=1) афинной алгебры $Sl(\hat{2})_k$, она задается набором генераторов J^a_m и коммутационными соотношениями:

$$[J^a_m, J^b_n] = iC^{ab}_c J^c_{m+n} + km\delta_{a,b}\delta_{m+n,0} \tag{62}$$

Где $C^{ab}_c = \epsilon_{abc}$-структурные константы алгебры Sl(2). Теория представления этой алгебры идет параллельно с теорией представлений обычной Sl(2). Следует перейти к генераторам $J^z_m, J^{\pm}_m$. Тогда J^z_0 - будет картаном, операторами рождения объявим все операторы J^a_m , с $n < 0$ и J^-_0, остальные операторы обьявим операторами уничтожения. Старшим вектором назовем такой что

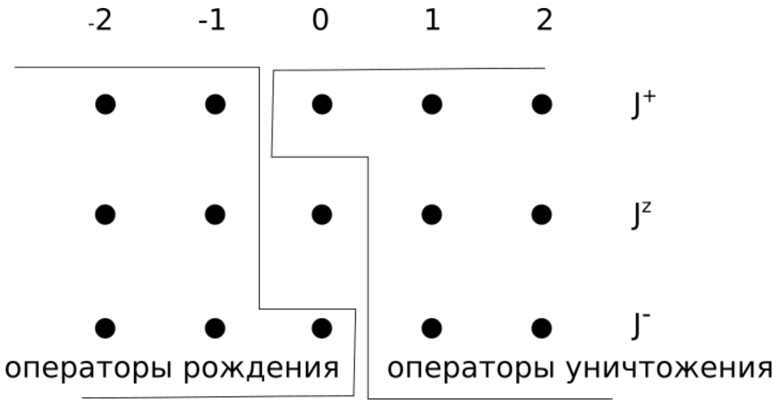

Рис. 3: борелевское разложение для генераторов афинной алгебры

$$J^z_0|s >= s|s > \tag{63}$$

Однако нас интересуют не любые представления, а такие что представление любой $Sl(2)$ подалгебры (J^z_0, J^+_m, J^-_{-m}) - конечномерно. Это накладывает некоторые ограничения, во первых как и в конечномерном случае старший вес s-целое число,а во вторых $s \leq k$, мы рассмотрим это подробнее на примере.

6.1 Представления афииных алгебр Ли и свободные бозоны

Для нас будет важно что представления афинных алгебр Ли можно исследовать с помощью алгебры свободных бозонов, состоящей из генераторов a_n , P с коммутационными соотношениям:

$$[a_n, a_m] = -2m\delta_{m+n,0} \tag{64}$$

$$[P, a_m] = 2\delta_{m,0} \tag{65}$$

Физики чаще пользуются полями $\phi(z)$ определенными как

$$\phi(z) = \sum_{n\neq 0} \frac{a_n}{n} z^n + a_0 \log(z) + Q \tag{66}$$

Генераторы афинной алгебры связанны с свободными бозонными полями следующим образом образуем токи

$$J^a(z) = \sum J_n^a z^{-n-1} \tag{67}$$

Можно проверить что операторы

$$J^z(z) = \partial\phi(z) \quad J^{\pm}(z) = e^{\pm\phi(z)} \tag{68}$$

Удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $\hat{S}l(2)_1$.
Для свободной бозонной алгебры существует стандартное фоковское представление:

$$\mathbb{F} = Span\{\mathbb{C}[a_{-1}, a_{-2}, ...]e^{\frac{\Lambda Q}{2}}|0>\} \tag{69}$$

Здесь Λ - предполагаются целыми, для того чтобы операторы z^{a_o} действовали целыми степенями z.
Поинтересуемся какие из этих векторов $|V_p>$ являются старшими :

$$K|V_p>= q^{a_0}|V_p>= q^i|V_i> \tag{70}$$

$$a_k|V_p>= 0, k > 0 \tag{71}$$

$$J_k^+|V_p>= 0, k \geq 0 \tag{72}$$

$$J_k^-|V_p>= 0, k > 0 \tag{73}$$

Из первого и второго условий следует что

$$|V_i>= e^{\frac{pQ}{2}}|0> \tag{74}$$

Третье и четвертое условие запишутся как

$$\oint_0 J^+(z)z^{k-1}e^{\frac{pQ}{2}}|0> dz = \oint_0 z^{p+k-1} : J^+(z)e^{\frac{pQ}{2}} : |0> dz = 0, k \geq 1 \tag{75}$$

$$\oint_0 J^-(z)z^k e^{\frac{pQ}{2}}|0> dz = \oint_0 z^{-p+k} : J^+(z)e^{\frac{pQ}{2}} : |0> dz = 0, k \geq 1 \tag{76}$$

Из первого следует что $p \geq 0$, в то время как из второго $p \leq 1$. Так что заключаем что существуют два представления старшего веса $|V_0>$ и $|V_1>$.

6.2 Предсавления квантовых афиннах алгебр Ли и q-деформироавнные свободные бозоны

Здесь мы все время будем обсуждать афинную q деформированную алгебру на уровне 1. Введем свободные q бозоны

$$[a_n, a_m] = \delta_{m,-n} \frac{[2n][n]}{n}, (m, n \neq 0) \tag{77}$$

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \tag{78}$$

А так же элемент $K = q^{a_0}$ и Дринфельдовские генераторы $x_k^{\pm} z^{-k-1} = X^{\pm}(z)$

$$Ka_n = a_n K, \quad Ke^Q = q^2 e^Q K \tag{79}$$

$$X^{\pm}(z) =: \exp(\pm \sum_{n \in \{\mathbb{Z}/0\}} \frac{a_{-n}}{[n]} q^{\mp \frac{|n|}{2}} z^n) : e^{\pm Q} z^{\pm a_0} \tag{80}$$

Из формул (1)-(3) можно получить следующие полезные формулы:

$$[x_k^+, x_l^-] = \frac{q^{\frac{k-l}{2}} \psi_{k+l} - q^{\frac{l-k}{2}} \phi_{k+l}}{q - q^{-1}} \tag{81}$$

Где $\psi_k, \phi_{-k} = 0$ при $k < 0$ и задаются своими производящими функциями при $k \geq 0$:

$$\psi_k z^{-k} = K \exp[(q - q^{-1}) \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}] \tag{82}$$

$$\phi_{-k} z^k = K^{-1} \exp[-(q - q^{-1}) \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^k] \tag{83}$$

Аналогично со случаем классической алгебры на уровне 1 будут существовать два представления

$$\mathbb{F}_p = Span\{\mathbb{C}[a_{-1}, a_{-2}, ...] e^{\frac{pQ}{2}} |0>\}, p = 0, 1 \tag{84}$$

Для дальнейшего важно знать связь Дринфельдовской реализации с реализацией Шевалле, т.к явные формулы для копроизведения удобнее писать для последней.

$$t_1 = K, \quad x_0^+ = e_1, \quad x_0^- = f_1, \quad x_1^- = e_0 t_1, \quad x_{-1}^+ = t_1^{-1} f_0 \tag{85}$$

Копроизведение определяется следующим образом:

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i \tag{86}$$

$$\Delta(f_i) = f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i \tag{87}$$

$$\Delta(t_i) = t_i \otimes t_i \tag{88}$$

Опишем теперь как построить операторы удовлетворяющие алгебре Замолодчикова-Фаддеева.
Определим Вертексный оператор как отображение

$$\Phi : V_p \to V_{1-p} \otimes V_z \tag{89}$$

Которое коммутирует с действием группы : $\Delta(x) \circ \Phi = \Phi \circ x$
Из этого определения следует что

$$\Phi(z)\Phi(w) : V_p \to V_p \otimes V_z \otimes V_w \tag{90}$$

И

$$\Phi(w)\Phi(z) : V_p \to V_p \otimes V_w \otimes V_z \tag{91}$$

Отличаются порядком множителей в тензорном произведении, но мы уже знаем что единственное отображение меняющее порядок токовых модулей и коммутирующее с действием группы задается R матрицей, отсюда сразу получаем коммутационные соотношения:

$$\Phi(\xi_2)\Phi(\xi_1) = R\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)\Phi(\xi_1)\Phi(\xi_2) \tag{92}$$

Для построения вертексных операторов введем компоненты оператора Φ

$$\Phi_\pm(z) : V_p = V_{1-p} \otimes V_\pm(z) \tag{93}$$

Подставляя вместо x генераторы алгебры получим:

$$K\Phi^\pm = q^\mp \Phi^\pm K \tag{94}$$

$$\Phi^+ x_0^+ = x_0^+ \Phi^+ + K\Phi^-, \qquad \Phi^+ x_0^- = q^{-1} x_0^- \Phi^+ \tag{95}$$
$$\Phi^- x_0^+ = x_0^+ \Phi^-, \qquad \Phi^- x_0^- = q x_0^- \Phi^- + \Phi^+ \tag{96}$$
$$\Phi^+ x_1^- = q x_1^- \Phi^+, \qquad \Phi^+ x_{-1}^+ = x_{-1}^+ \Phi^+ + (zqK)^{-1} \Phi^- \tag{97}$$
$$\Phi^- x_1^- = q^{-1} x_1^- \Phi^- + zq^2 \Phi^+, \qquad \Phi^- x_{-1}^+ = x_{-1}^+ \Phi^- \tag{98}$$

Из этих формул рекуррентным образом можно получить явный вид операторов $\Phi_\pm$ через бозонные операторы.

$$\Phi^-(z) = \exp[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{[2n]} q^{\frac{7n}{2}} z^n] \exp[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{[2n]} q^{-\frac{5n}{2}} z^{-n}] e^{\frac{Q}{2}} (-q^3 z)^{\frac{(a_0+p)}{2}} \tag{99}$$

$$\Phi^+ = \Phi^- x_0^- - q x_0^- \Phi^- \tag{100}$$

Как видно, вертексные операторы однозначно фиксируются, поэтому фиксируется не только матричная структура R матрицы но и скалярный множитель, который, к сожалению, не совпадет с множителем теории SG.

Список литературы

[1] Фаддев Л.Д, Тахтаджан *Гамильтонов Подход в теории солитонов*

[2] В.Е Корепин, Л.Д Фаддеев *Квантование Солитонов, ТМФ*, 1975 , т. 25, 2, стр 147-163.

[3] R Hirota *Exact Solution of the Sine-Gordon Equation for Multiple Collisions of Solitons*, Journal of the Physical Societyof Japan,vol.33 , No. 5 , November, 1972 .

[4] N. Reshetikhin and F. Smirnov *Hidden quantum group symmetry and integrable perturbations of conformal field theories* Comm. Math. Phys. Volume 131, Number 1 (1990), 157-177.

[5] П.П Кулиш, Е.Р Нисимов *Законы сохранения в квантовой теории* $(\cos\phi - 1)$ *и модели Тирринга* Jetp-Lett, 24 (1976) p247

[6] R.F Dashen, B Hasslaher, A Neveu *Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techinques* Physical Reciew D, vol 11, No 12 , 15 june 1975.

[7] Замолодчиков А.Б *Точная двухчастичная S-матрица в квантовой модели Синус-Гордона* Commun.Math.Phys. 55 (1977). P. 183-186

[8] Alexander B. Zamolodchikov , Alexey B. Zamolodchikov *Factorized S-Matrices in Two Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Theory Models* Ann Phys 120,253-291 (1979)

[9] W. E. Thirring ,*A Soluble Relativistic Field Theory* , Annals Phys. 3 (1958) 91

[10] S. Coleman,*Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model* Phys. Rev. D11 (1975) 2088

[11] Smirnov, F.A : *Form-factors in completely integrable models of quantum field theory. Singapore: World Scientific, 1992*

[12] B. Davies, O. Foda, M. Jimbo, T. Miwa, and A. Nakayashik *Diagonal- ization of the XXZ Hamiltonian by vertex operators* Commun. Math. Phys, 151:89-153, 1993.

[13] M. Jimbo, T. Miwa *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models* American Mathematical Society; First Edition, First Printing edition (December 28, 1994)

[14] V. G. Drinfeld. *Quantum groups* In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, pages 798-820, Berkeley, 1987.

[15] Fabian H.L. Essler, Robert M. Konik *Applications of Massive Integrable Quantum Field Theories to Problems in Condensed Matter Physics* arXiv:cond-mat/0412421

[16] S. L. Lukyanov, Commun. Math. Phys. 167 (1995) 183 [arXiv:hep-th/9307196]

[17] S. L. Lukyanov, Mod. Phys. Lett. A12 (1997) 2543 [arXiv:hep-th/9703190]

[18] B. Feigin and M. Lashkevich, J. Phys. A42 , 304014 (2009), arXiv:0812.4776 .

[19] Michael Lashkevich, Yaroslav Pugai *Form factors of descendant operators: Resonance identities in the sinh-Gordon model* JHEP 1412 (2014) 112 , arXiv:1411.1374 .

[20] Michael Lashkevich, Yaroslav Pugai *Form factors in sinh- and sine-Gordon models, deformed Virasoro algebra, Macdonald polynomials and resonance identities* Nucl.Phys. B877 (2013) 538-573, arXiv:1307.0243.

[21] Subir Ghoshal and Alexander Zamolodchikov *Boundary S-matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory* Int.J.Mod.Phys. A9 (1994) 3841-3886; Erratum-ibid. A9 (1994) 4353